جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج

الرياضيات

للصف السادس الأدبي

تأليف

الدكتور طارق شعبان رجب الحديثي الدكتور مهدي صادق عباس
محمد عبد الغفور الجواهري حسام علي حيدر
صباح علي مراد سعد محمد حسين البغدادي
نظير حسن علي

الطبعة الثانية عشر ١٤٤٥ هـ / ٢٠٢٣ م

المشرف العلمي على الطبع

حسين صادق العلاق

المشرف الفني على الطبع

علي غازي جواد

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج







بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمــة

نظراً للتطور الكبير الحاصل في المواد الدراسية عامة والرياضيات خاصة ، تُعنى وزارة التربية بإعادة النظر في الكتاب المدرسي وتنقيحه او إعادة تأليفه وفق لجان مختصة تؤلف لهذا الغرض. وتلقى كتب الرياضيات نصيبها الوافي من هذه العناية.

وهذا الكتاب الثالث من سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة الإعدادية للفرع الأدبي، وقد رتبنا هذا الكتاب باربعة فصول ، يبدأ الفصل الأول بموضوع طرائق العد، الفصل الثاني موضوع الغايات والإستمرارية، أما الفصل الثالث فيتناول موضوع المشتقات، وينتهي الكتاب بموضوع التكامل في الفصل الرابع وقد راعينا بعض التطبيقات في المشتقة والتكامل التي تنسجم مع الدراسة الأدبية .

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للمنهج الدراسي المقرر وحاولنا إن نستخدم الطرق التربوية الحديثة فقمنا بهذا المجهود واضعين نصب أعيننا توضيح وشرح

المادة العلمية بقصد الافهام وتوخينا الإكثار من الامثلة المحلولة ومن التمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته العملية، ومتدرجة من السهل إلى الصعب.

وختاماً نرجو إن نكون قد وفقنا إلى خدمة أبنائنا الطلبة ، ونرجو من إخواننا المدرسين أن يوافونا بملاحظاتهم حول هذا الكتاب لكي نتلافى النقص فيه والكمال لله وحده.

المؤلفون

الفصل الاول

مبرهنة ذات الحدين

BINOMIAL THEOREM

[1-1] طرائق العد Counting methods

من المعلوم انه من الاهداف الرئيسة لدراسة الرياضيات ان يتعلم الطالب العد بمهارة فائقة وعالية جداً وسوف نتعلم في هذا الفصل بعضا من طرائق العد التي تقلل من الجهد وتختصر الوقت في ايجاد اعداد كميات كبيرة، وهي :

1- مبدأ العد الاساسي **Funmdamental Counting Principle**

2-التباديل **Permutations**

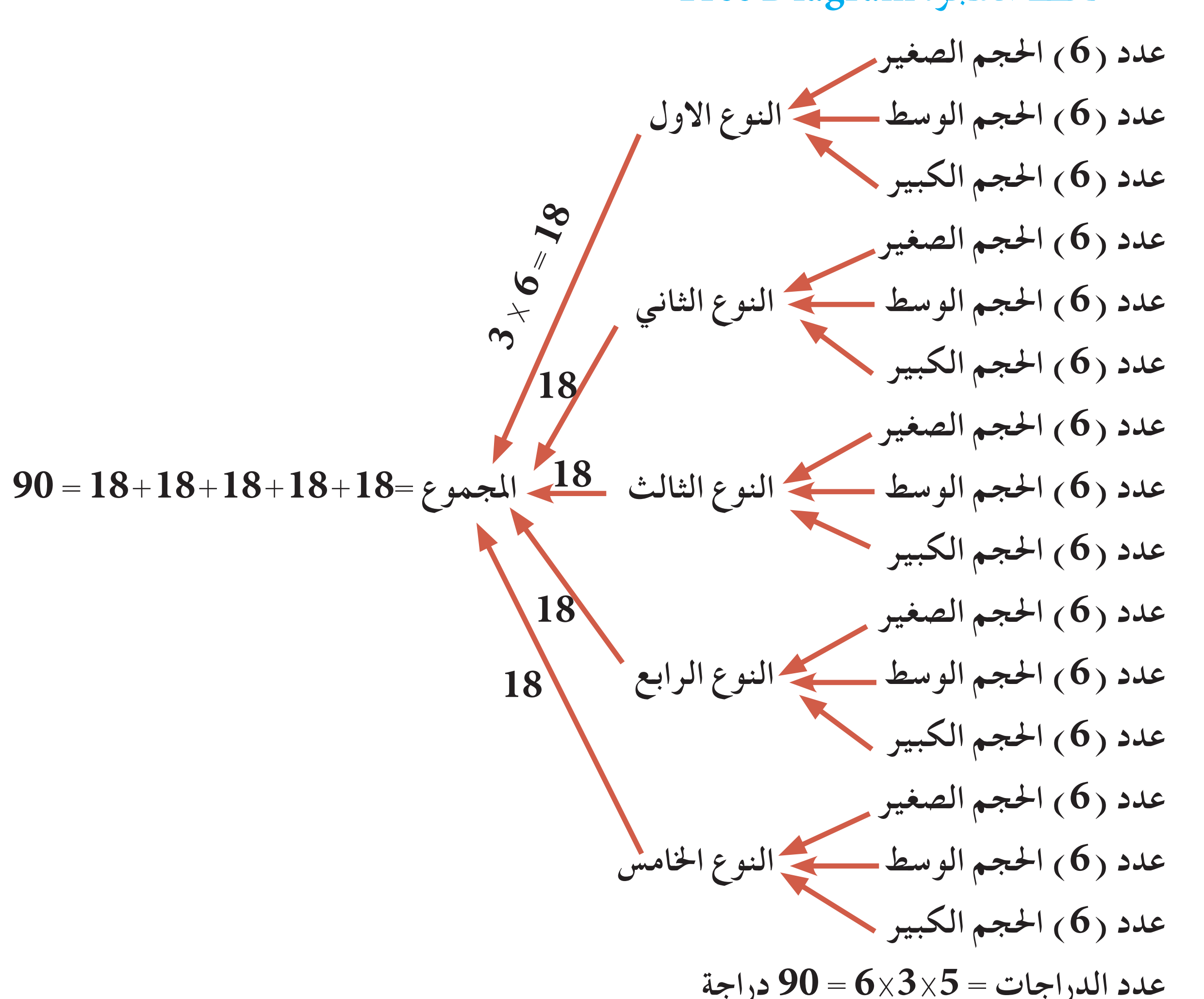
3- التوافيق **Combinations**

مثال 1

اعلن صاحب محل لبيع الدراجات الهوائية انه يوجد لديه خمسة انواع من الدراجات ومن كل نوع توجد ثلاثة احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات في المحل ؟

الحل

مخطط الشجرة **Tree Diagram**



عدد الدراجات = 5x3x6 = 90 دراجة

مثال 2

اعلن علي احد بائعي البدلات الرجالية ان لديه اكبر تشكيلة من البدلات حيث يوجد في محله (5) موديلات ومن كل موديل يوجد (10) قياسات مختلفة ومن كل قياس يوجد (7) الوان مختلفة فما عدد البدلات الموجودة في المحل ؟

الحل

يمكن توضيح هذا المثال بمخطط الشجرة كما في المثال الاول ويكون من السهل حساب عدد البدلات كما يلي :

عدد البدلات $= 5 \times 10 \times 7$

$= 350$ بدلة

ونصادف في حياتنا كثيراً من هذه الحالات وواضح أن الفكرة التي استخدمت في حل هذين المثالين هي واحدة. وعليه يمكن اخذ العبارة الاولية الاتية التي توضح الفكرة التي استخدمت في حل المثالين السابقين.

عبارة اولية

(مبدأ العد الاساسي)

لو فرض انه لدينا عدد من العمليات (الاختيارات) مقداره (k) امكن القيام بالعملية الاولى بعدد من الطرق مقداره (n_1) وامكن القيام بالعملية الثانية بعدد من الطرق مقداره (n_2) والعملية الثالثة بعدد من الطرق مقداره (n_3) ... والعملية من الرتبة (k) بعدد من الطرق مقداره (n_k) بحيث ان اجراء اي عملية لايؤثر في اجراء اي من العمليات الاخرى فإنه يوجد عدد مقداره: $((n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots\ldots \times n_k))$ من النتائج (الطرق) الممكنة عندما تجرى جميع العمليات (او الاختيارات) التي عددها (k) معاً.

مثال 3

اذا كانت لدينا الحروف أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ز .كم كلمة (بمعنى او بدون معنى) يمكن تكوينها بحيث تكون مكونه من اربعة حروف على أن لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة؟

الحل

عدد طرق اختيار الحرف الاول = 6

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = 5

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = 4

عدد طرق اختيار الحرف الرابع = 3

∴ عدد الكلمات = $6\times5\times4\times3$

= 360 كلمة

مثال 4

بكم طريقة يمكن تكوين عدد رمزه مكون من اربعة مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{1,2,4,6,7,8,9\}$ عندما (أ) التكرار مسموح؟ (ب) التكرار غير مسموح؟

الحل

(a) التكرار مسموح

- عدد طرق اختيارات رقم الاحاد = 7
- عدد طرق اختيارات رقم العشرات=7
- عدد طرق اختيارات رقم المئات=7
- عدد طرق اختيارات رقم الالوف=7
- ∴ عدد الطرق الكلي = $7\times7\times7\times7$

= 2401 عدداً

(b) التكرار غير مسموح

عدد طرق اختيارات رقم الاحاد = 7

عدد طرق اختيارات رقم العشرات = 6

عدد طرق اختيارات رقم المئات = 5

عدد طرق اختيارات رقم الالوف = 4

∴ عدد الطرق = $7\times6\times5\times4$

= 840 عدداً

مثال 5

اذا كان لدى فتاة (6) قمصان مختلفة الالوان و (7) تنورات مختلفة الالوان ايضاً و (4) احذية مختلفة فبكم زي مختلف مكون من قميص وتنورة وحذاء يمكن ان تظهر به الفتاة؟



عدد طرق اختيار القميص الواحد = 6

عدد طرق اختيار التنورة الواحدة = 7

عدد طرق اختيار الحذاء الواحد = 4

∴ عدد الازياء التي تظهر بها الفتاة = $4 \times 7 \times 6$

= 168 زي

مثال 6

بكم طريقة يمكن تكوين عدداً رمزه من (3) ارقام واقل من (500) يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 اذا كان: (أ) يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

(ب) لايسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟



من الواضح ان العدد الذي رمزه مكون من ثلاثة مراتب يحتوي على رقم احاد ورقم عشرات ورقم مئات وعندما يكون العدد اقل من (500) فان رقم مئاته اصغر من (5) وعليه يكون الحل:

(a) في حالة السماح بتكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيارات رقم المئات = 4 (لاحظ الارقام في المثال)

عدد طرق اختيارات رقم العشرات = 7

عدد طرق اختيارات رقم الاحاد = 7

∴ عدد الاعداد = $4 \times 7 \times 7$

= 196 عدداً

b) في حالة عدم السماح بتكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيارات رقم المئات = 4

عدد طرق اختيارات رقم العشرات = 6

عدد طرق اختيارات رقم الاحاد = 5

∴ عدد الاعداد = $5 \times 6 \times 4$

= 120 عدداً

مثال 7

كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 بحيث

a) يكون العدد زوجياً وتكرار الرقم في العدد غير مسموح به ؟

b) يكون فردياً وتكرار الرقم في العدد مسموح به؟

الحل

a) العدد الزوجي يكون احاده عدداً زوجياً والتكرار غير مسموح به وعليه يكون

عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 3

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6 لماذا؟

عدد طرق اختيار رقم المئات = 5

∴ عدد الاعداد = $3 \times 6 \times 5$

= 90 عدداً

b) العدد الفردي يكون احاده عدداً فردياً والتكرار مسموح به وعليه يكون

عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 4

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7 لماذا؟

عدد طرق اختيار رقم المئات = 7

عدد الاعداد = $4 \times 7 \times 7$

= 196 عدداً

تمارين (1-1) ؟

1- لدى احمد (5) سترات مختلفة (6) بنطلونات مختلفة (8) قمصان مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من سترة وبنطلون وقميص ؟

2- اذا كان لدينا الحروف أ- ل - ع - ق - ك - ب . كم كلمة مكونة من اربعة احرف (بمعنى او بدون معنى) من هذه الحروف على انه لايسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

3- بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث اشخاص من بين عشرة اشخاص لشغل ثلاثة وظائف معينة مختلفة؟

4- كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 3,4,5,6,7,8,9

a) على ان يكون العدد فردياً والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه.

b) على ان يكون العدد زوجياً والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه.

5- كم عدداً يكون رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7

a) على ان يكون العدد اكبر من (500) والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه؟

b) على ان يكون العدد اصغر من (400) والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه؟

[1-2] مضروب العدد Factorial

مثال 1

ليكن لدينا (n) طالباً [حيث (n) عدد صحيح غير سالب] واردنا ان نجلسهم على نفس العدد من الكراسي التي على استقامة واحدة. من المعلوم اننا نستطيع ان نجلس اي واحد من الطلاب وعددهم (n) على الكرسي الاول وعلى الكرسي الثاني يمكن ان نجلس اي طالب من بقية الطلاب وعددهم (n−1) وعلى الكرسي الثالث من الممكن ان نجلس اي طالب من بقية الطلاب وعددهم (n−2) ... وهكذا الى ان نصل الى الكرسي الاخير الذي يمكن ان يجلس عليه الطالب الوحيد الذي بقي واقفاً ... وهكذا اذا اعتبرنا عملية جلوس الطلاب تتكون من (n) مرحلة فعدد الخيارات في المراحل الاولى والثانيةوالثالثة ... الاخيرة هو على التوالي:

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, n-2, n-1, n$$

وعلى ما سبق دراسته فإن عدد خيارات جلوسهم هو:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots 1$$

وفي احيان كثيرة في الرياضيات نحصل على ضرب الاعداد الصحيحة ابتداءاً بالعدد n وحتى 1 ويرمز لهذا الضرب بالرمز $n!$ أو $\underline{|n}$ ويقرأ مضروب (او مفكوك)(n) ويعرف كما يأتي:

اذا كان n عدد صحيح غير سالب [n عدد طبيعي] فإن :

عندما $n \geq 2$

$$\underline{|n} = n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots 2\times 1$$

$1! = 1$ من التعريف

$0! = 1$ علماً ان

فمثلاً :

$$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$$

$$10! = 10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 3628800$$

مثال 2 اكتب بابسط صورة $\frac{8!}{6!}$ او $\frac{\underline{|8}}{\underline{|6}}$

الحل

$$\frac{\underline{|8}}{\underline{|6}} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 8\times7 = 56$$

مثال 3

جد !9

الحل

يمكن القول أنه :

$$9! = 9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$

$$9! = 9\times8!$$

أو $9! = 9\times8\times7!$

أو $9! = 9\times8\times7\times6!$

وهكذا وبصورة عامة يمكن القول أنه :

$$n! = n(n-1)!$$

أو $n! = n(n-1)(n-2)!$

وهكذا

$$\therefore\ 9! = 362880$$



مثال 4

اذا كان $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$ فما قيمة n ؟

الحل

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 6$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$

$$n(n-1) = 6$$

$$n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n+2)(n-3) = 0$$

$n = -2$ يهمل لأنه سالب

الجواب : $n = 3$

مثال 5

اذا كان $n! = 720$ فما قيمة n ؟





الحل

تكتب 720 بشكل حاصل ضرب اعداد متتالية مبتدئة من العدد 1 وذلك بالشكل :

720	1
720	2
360	3
120	4
30	5
6	6
1	

فيكون :

$$720 = 1\times2\times3\times4\times5\times6$$

$$= 6!$$

$$n! = 720$$

$$n! = 6!$$

$$n = 6$$

3-1 التباديل permutations

مثال 1

لنفرض ان 7 اشخاص يريدون الجلوس ولم يجدوا امامهم سوى (3) كراسي فبكم طريقة يمكن ملء هذه الكراسي الثلاثة؟

الحل

لذلك نقول:

الكرسي الاول يمكن ملؤه بطرق عددها (7) فإذا ماجلس عليه احدهم امكن ملء الكرسي الثاني بطرق عددها (6) ويمكن ملء الكرسي الثالث بطرق عددها (5) وبذلك يكون عدد كل الطرق الممكن اجراؤها

$= 7 \times 6 \times 5$

$= 210$

نلاحظ أنه يوجد لدينا (7) اشخاص أُخذ منهم ثلاثة ثلاثة للجلوس.

في مثل هذه الحالات في الرياضيات نقول تباديل 7 مأخوذة ثلاثة ثلاثة ويرمز لها بالرمز p^7_3

وكان الناتج:

$$p^7_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

وبالمثل اذا كان لدينا (10) اشخاص لملئ (4) اماكن يكون

$$p^{10}_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

تعريف (1-1)

ليكن كل من n, r عدداً طبيعياً ، $r \le n$ فإن p^n_r تقرأ تباديل n مأخوذة منه r في كل مرة ويكون:

$$p^n_r = \begin{cases} n! & n = r \text{ اذا كان } \\ n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) & r < n \text{ عندما } \\ 1 & r = 0 \text{ عندما } \end{cases}$$

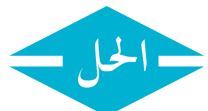
ويمكن ان نضع:

$$p^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ومن الملاحظ أن عدد تباديل (n) من العناصر مأخوذة منها (r) من العناصر حيث $n < r$ يساوي عدد الطرق التي نختار بها (r) من العناصر من بين (n) من العناصر بكل الترتيبات الممكنة.

مثال 2

أحسب كلاً مما يأتي : p^{10}_{0} ، p^{4}_{4} ، p^{6}_{3}



a) $p^{6}_{3} = 6\times5\times4 = 120$

b) $p^{4}_{4} = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

c) $p^{10}_{0} = 1$

مثال 3

ما عدد طرق توزيع (5) اشخاص على (5) وظائف مختلفة بحيث لكل واحد منهم وظيفة واحدة؟



عدد الطرق يكون

$$p^{5}_{5} = 5!$$

$$= 5\times4\times3\times2\times1 = 120$$

مثال 4

جد قيمة n اذا كان $p^{n}_{2} = 42$.



$$p^{n}_{2} = 42$$

$$n(n-1) = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0$$

$$(n-7)(n+6) = 0$$

$$n = 7$$

$n = -6$ يهمل لانه سالب

مثال 5

جد قيمة كل من p^{8}_{5} ، p^{15}_{7} .



$$p^{8}_{5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}$$

$$= 8\times7\times6\times5\times4 = 6720$$

$$p^{15}_{7} = 15\times14\times13\times12\times11\times10\times9 = 32432400$$

مثال 6

اذا كان $p^{6}_{r} = p^{6}_{3}$ فما قيمة (r) ؟

الحل

$$p^{6}_{3} = p^{6}_{r} \Rightarrow \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{(6-r)!} \Rightarrow \frac{6!}{3!} = \frac{6!}{(6-r)!}$$

$$\therefore (6-r)! = 3! \Rightarrow 6-r = 3 \Rightarrow r = 3$$

> **ملاحظة** : من المثال السابق يمكن القول بصورة عامة :
>
> اذا كان $p^{n}_{r} = p^{n}_{k}$ فإن $r = k$ حيث $n > r$

مثال 7

ما عدد الاعداد التي رمز كل منها مكون من ثلاثة ارقام مأخوذة من بين الارقام 3، 4، 5، 6، 7، 8 .

a) دون تكرار الرقم في العدد ؟

b) يمكن تكرار الرقم في العدد ؟



a) عدد الاعداد = p^{6}_{3}

$= 6 \times 5 \times 4$

$= 120$ عدداً

b) عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 6

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6

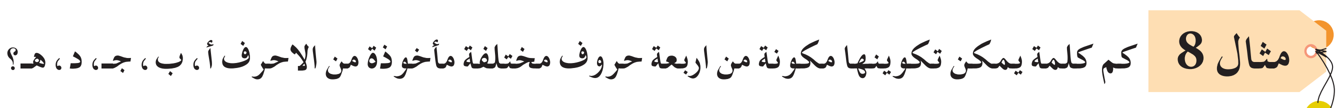
عدد طرق اختيار رقم المئات = 6

وبموجب مبدأ العد يكون عدد الاعداد = $6 \times 6 \times 6$

= 216 عدداً



مثال 8



كم كلمة يمكن تكوينها مكونة من اربعة حروف مختلفة مأخوذة من الاحرف أ ، ب ، جـ ، د ، هـ؟

الحل

عدد الكلمات يكون p^{5}_{4}

$$p^{5}_{4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1!} = 120$$ كلمة

تمارين (2-1)

1- احسب قيمة كل مما يأتي :

a) $\frac{7!}{5!}$

b) $\frac{\lfloor 9}{\lfloor 5} - \frac{\lfloor 10}{\lfloor 6}$

2- جد قيمة n اذا كان :

a) $n! = 5040$

b) $P_2^n = 72$

c) $P_5^n = 8 \times P_4^n$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$

3- اذا كانت لدينا المجموعة $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ فكم عدداً يمكن تكوينه اذا كان :

a) رمزه مكون من ثلاثة ارقام بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

b) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

c) رمزه مكون من ثلاثة ارقام اصغر من (400) بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

d) رمزه مكون من ثلاثة ارقام اكبر من (200) ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

e) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويكون زوجياً بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

f) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويكون فردياً ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

4- يُجرى في احد الصفوف انتخاباً على ثلاثة مراكز في احدى لجان الصف هي الرئيس ونائب الرئيس وامين السر ما عدد النتائج التي تسفر عنها الانتخابات اذا علم ان عدد الطلاب المشاركين في الانتخابات عشرة طلاب ؟

5- كم كلمة مختلفة الحروف مكونة من ثلاثة حروف من بين حروف كلمة (ذي قار) ؟

6- بكم طريقة يمكن أن يجلس خمسة طلاب في صف من ثمانية كراسي ؟

[1-4] التوافيق Combinations

مثال 1

اذا كان لدينا المجموعة $x = \{1 , 2 , 3\}$ كم مجموعة جزئية للمجموعة x مكونة من عنصرين ؟

الحل

نلاحظ أن المجموعات الجزئية من x والمكونة من عنصرين هي :

$\{1 , 2\}$ ، $\{1 , 3\}$ ، $\{2 , 3\}$

لاحظ في هذا المثال انه في كل اختيار لم نضع اعتباراً للترتيب فمثلاً الاختيار $\{1 , 2\}$ هو نفسه $\{2 , 1\}$ والاختيار $\{1 , 3\}$ هو نفسه $\{3 , 1\}$ والاختيار $\{2 , 3\}$ هو نفسه $\{3 , 2\}$ وأن عدد المجموعات الجزئية ثلاث وليس ست.

مثل هذا الاختيار وهو اختيار عنصرين من بين ثلاثة عناصر دون مراعاة الترتيب للعناصر التي تم اختيارها يسمى (توافيق) **Combination** وفي هذا المثال يقال : توافيق ثلاثة مأخوذة اثنين اثنين.

تعريف (1-2)

1- توافيق مجموعة منتهية من العناصر هو تنظيم لبعض او لكل هذه العناصر دون اعتبار (الاهتمام) للترتيب الذي تنتظم به هذه العناصر.

2- عدد توافيق (n) من العناصرمأخوذة (r) في كل مرة حيث $r \leq n$ وأن n , r اعداد صحيحة غير سالبة هو عدد طرق اختيار (r) من العناصر دون الاعتبار (الاهتمام) لترتيب هذه العناصر

ويرمز لذلك بالرمز : C^n_r أو $\binom{n}{r}$ أو $C(n , r)$

3- اذا كان $r < n$

$$C^n_r = \binom{n}{r} = \frac{P^n_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

اذا كان $n = r$ أو $r = 0$

$$C^n_r = \binom{n}{r} = 1$$

وقبل حل بعض الامثلة يتوجب التأكيد على أن الفرق الوحيد بين التباديل والتوافيق يكمن في الاهتمام (مراعاة) او عدم الاهتمام (عدم مراعاة) بالترتيب .

مثال 2 احسب : C^{13}_{5} ، C^{10}_{0} ، C^{20}_{20}

الحل

a) $C^{13}_{5} = \binom{13}{5} = \dfrac{P^{13}_{5}}{5!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{13!}{5!\,(13-5)!}$

$= \dfrac{13\times12\times11\times10\times9\times\cancel{8!}}{5\times4\times3\times2\times\cancel{8!}} = 1287$

b) $C^{10}_{0} = \binom{10}{0} = 1$

c) $C^{20}_{20} = \binom{20}{20} = 1$

مثال 3 جد قيمة كلاً من C^{15}_{12} ، C^{15}_{3} ثم لاحظ الناتجين .

الحل

القانون — التعويض — التبسيط

$C^{15}_{12} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{15!}{12!\times(15-12)!} = \dfrac{15\times14\times13\times12!}{12!\times3!} = 455$

$C^{15}_{3} = \dfrac{15!}{3!\,(15-3)!} = \dfrac{15!}{3!\times12!} = 455$

نلاحظ أن : $C^{15}_{12} = C^{15}_{3}$

يمكن الاستنتاج بصورة عامة أن : $C^{n}_{r} = C^{n}_{n-r}$

مثال 4

اذا كان عدد الاسئلة في الورقة الامتحانية (8) اسئلة والمطلوب الاجابة على (6) منها فبكم طريقة يمكن الاجابة؟

الحل

الترتيب غير ضروري في الاجابة على الاسئلة الامتحانية لذا فإن :

عدد الطرق = C^{8}_{6}

$$C^{8}_{6} = \frac{8!}{6!\,(8-6)!} = \frac{8\times7\times6!}{6!\times2!}$$

$$= \frac{8\times7}{2\times1} = 28$$ طريقة

مثال 5

كم قطعة مستقيم يمكن تحديدها بنقطتين من مجموعة فيها (6) نقاط و لا توجد ثلاث منها على استقامة واحدة؟

الحل

عدد القطع المستقيمة يكون :

$$C^{6}_{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!} = 15$$

مثال 6

جد قيمة n اذا كان $2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$



$$2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

القانون

$$2\times\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{3!\,(n+1-3)!}$$



$$2\times\frac{n!}{2\times1\times(n-2)!} = \frac{(n+1)\times n!}{3\times2\times1\,(n-2)!}$$

الناتج

$$1 = \frac{n+1}{6} \Rightarrow n+1 = 6$$

$$n = 5$$

مثال 7

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من (5) طالبات ، (7) طلاب من بين مجموعة مكونة من (8) طالبات، (10) طلاب؟

الحل

في اللجنة المطلوبة (5) طالبات يمكن اختيارهن من بين (8) طالبات وعليه يكون :

عدد طرق اختيار الطالبات = C_5^8

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$$ طريقة

7 طلاب يُختارون من بين (10) طلاب فيكون :

عدد طرق اختيار الطلاب = C_7^{10}

$$C_7^{10} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$ طريقة

وباستخدام مبدأ العد الاساسي يكون :

عدد طرق تكوين اللجنة $= 56 \times 120$

$= 6720$

مثال 8

صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء , (4) كرات بيضاء يراد سحب (اختيار) (5) كرات معاً بشرط أن تكون (3) كرات حمراء فقط بكم طريقة يمكن اجراء السحب ؟

الحل

عدد طرق سحب (3) كرات حمراء = C_3^6

$$C_3^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3\times2\times1} = 20$$ طريقة

عدد طرق سحب كرتين بيضاء = C_2^4

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2!\times2\times1} = 6$$ طرق

عدد الطرق الممكنة $= 6\times20 = 120$

تمارين (3-1)

1- جد قيمة كلاً من :

a) C^{11}_{5} b) $C_{(18,18)}$ c) $\binom{7}{0}$ d) $\frac{1}{210}\left[P^{7}_{3} + P^{7}_{4}\right]$

2- جد قيمة n إذا كان :

$$C^{n}_{20} = C^{n}_{35}$$

3- اي العبارات الاتية صائبة واي منها خاطئة ؟

a) $C^{16}_{6} = C^{10}_{4}$

b) $C^{25}_{23} = \frac{P^{25}_{2}}{2!}$

c) اذا كان $\binom{n}{4} = \binom{n}{6}$ فإن $n = 10$

d) عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على ثلاثة عناصر التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصره عشرة هو C^{10}_{3} .

e) سبعة اشخاص ليسوا متمايزين يكون عدد طرق اختيار ثلاثة منهم هو P^{7}_{3} .

f) عدد طرق اختيار شخصين من بين ستة اشخاص دون مراعاة الترتيب عند الاختيار = 15 طريقة .

g) $P^{3}_{0} - 2\underline{|0} = -1$

h) لكل $n, r \in N$ اذا كان $P^{5}_{n} = P^{5}_{r}$ فإن $n = r$

4- اختر الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

a) عدد طرق اختيار لجنة ثلاثية من بين (10) اشخاص يساوي :

(1) P^{10}_{3} (2) C^{10}_{3} (3) $\frac{10!}{3!}$ (4) ليس اي مما سبق

b) اذا كان (n) عدد المجموعات الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها (6) فإن n يساوي:

(1) 15 (2) 6 (3) 4 (4) 2

c) عدد القطع المستقيمة التي يمكن ان تصل بين اي رأسين من رؤوس مضلع سداسي يساوي:

(1) 6×6 (2) C^{6}_{2} (3) P^{6}_{2} (4) $\underline{|6}$

d) $\binom{68}{8} \div C^{68}_{60}$

(1) 68 (2) $\frac{8}{60}$ (3) 1 (4) $\frac{P^{68}_{8}}{8}$

e) اذا كان لدينا الارقام 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 فإن عدد الاعداد المكون رمزها من اربعة ارقام مختلفة من بين هذه الارقام هو :

(1) $\underline{|9}$ (2) $\binom{9}{4}$ (3) $\underline{|4}$ (4) ليس اي مما سبق

5- يراد تشكيل لجنة من ستة اعضاء من بين (5) طلاب ، (8) مدرسين فبكم طريقة يمكن أن تكون اللجنة محتوية على مدرسين اثنين فقط ؟

6- صندوق يحتوي على (4) كرات حمراء ، (8)كرات بيضاء سحبت ثلاث كرات معاً جد عدد طرق سحب :

1) اثنتان حمراء و واحدة بيضاء.

2) على الاقل اثنتان حمراء.

7- اذا كان عدد اسئلة امتحان مادة ما هو (10) اسئلة وكان المطلوب حل (7) اسئلة منها على أن نختار (4) من الخمسة الاولى ، فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

[1-5] مبرهنة ذات الحدين Bionomial Theorm

مبرهنة ذات الحدين :

هي قانون لايجاد ناتج قوى مجموع حدين اي مقدار مكون من مجموع حدين مثل $(x+y)$ اذا رفع الى اي اس صحيح موجب.

لنلاحظ المثال التالي:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$= C^2_0 x^2 + C^2_1 xy + C^2_2 y^2$$

لإن

$$C^2_2 = 1 \quad ، \quad C^2_1 = 2 \quad ، \quad C^2_0 = 1$$

وبالمثل يكون

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= C^3_0 x^3 + C^3_1 x^2 y + C^3_2 x y^2 + C^3_3 y^3$$

وكذلك

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1\ y^4$$
$$= C^4_0 x^4 + C^4_1 x^3 y + C^4_2 x^2 y^2 + C^4_3 x y^3 + C^4_4 y^4$$

وهكذا يمكن القول بصورة عامة أنه اذا كان (n) عدد صحيح موجب فإن:

$$(x+y)^n = C^n_0 x^n + C^n_1 x^{n-1} y + C^n_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C^n_n y^n$$

يسمى هذا القانون بقانون مفكوك ذي الحدين .

Notes

ملاحظات

من قانون مفكوك ذي الحدين نلاحظ :

1- عدد حدود المفكوك = $n+1$

2- مجموع اسس y ، x في كل حد من حدود المفكوك = n

3- معامل كل حد رتبته r في مفكوك $(x+y)^n$ هو C^n_{r-1} فمثلاً معامل الحد الخامس في مفكوك $(x+y)^8$ هو C^8_4 ويكون:

$$C^8_4 = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4!\times4!}$$

4- في مفكوك $(x+y)^n$ يكون اس الحد الاخير $(y) = n$ واس الحد الاول$(x) = n$.

5- اس الحد الاول للمتغير x يبدأ بالتناقص من n الى 0 واس الحد الثاني للمتغير y يبدأ بالتزايد من 0 الى n .

6- اذا كان n عدداً زوجياً فإن عدد حدود المفكوك هو $(n+1)$ فردياً ويكون هناك حداً ا وسط رتبته $\frac{n}{2}+1$ اما اذا كان n عدداً فردياً فإن عدد حدود المفكوك $(n+1)$ زوجياً ويكون هناك حدان اوسطان رتبتهما $\frac{(n+1)}{2}+1$ ، $\frac{(n+1)}{2}$

7- في مفكوك $(x+y)^n$ يكون قانون الحد العام [الحد الذي رتبته (r)] :

$$P_r = C^n_{r-1}\; x^{n-r+1}\; y^{r-1}$$

8- مفكوك $(x \mp y)^n$ يكون بالشكل :

$$C^n_0\, x^n - C^n_1\, x^{n-1} y + C^n_2\, x^{n-2} y^2 - C^n_3\, x^{n-3} y^3 + \dots\dots\dots + C^n_n\, (-y)^n$$

نلاحظ في هذا المفكوك تكون الحدود سالبة او موجبة على التعاقب ويكون الحد الاخير موجباً اذا كان n عدداً زوجياً وسالباً اذا كان n عدداً فردياً .

مثال 1

جد مفكوك $(x-y)^5$

الحل

$$(x-y)^5 = C^5_0 x^5 - C^5_1 x^4 y + C^5_2 x^3 y^2 - C^5_3 x^2 y^3 + C^5_4 x y^4 - C^5_5 y^5$$

$$= x^5 - 5x^4 y + 10x^3 y^2 - 10x^2 y^3 + 5xy^4 - y^5$$

مثال 2

جد مفكوك $(3a+b)^4$

الحل

$$(3a+b)^4 = C^4_0 (3a)^4 + C^4_1 (3a)^3 b + C^4_2 (3a)^2 b^2 + C^4_3 (3a) b^3 + C^4_4 b^4$$

$$= 81a^4 + 108a^3 b + 54a^2 b^2 + 12ab^3 + b^4$$

مثال 3

اوجد الحد الخامس في المفكوك $(x-3y)^8$

الحل

$$P_r = C^n_{r-1} x^{n-r+1} (-3y)^{r-1} \text{ ، } P_5 = C^8_4 x^4 (-3y)^4$$

$$= \frac{8!}{4!\,(8-4)!} x^4 (81y^4)$$

$$= 70 \times 81 x^4 y^4 = 5670 x^4 y^4$$

مثال 4

جد الحد الاوسط في مفكوك $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^8$

الحل

∵ الاس عدد زوجي فيوجد حد اوسط واحد رتبته

$$= \frac{n}{2} + 1$$

$$= \frac{8}{2} + 1$$

$$= 5$$

الحد العام هو :

$$P_r = C^n_{r-1} x^{n-r+1} y^{r-1}$$

الحد الاوسط هو الحد الخامس التعويض

$$P_5 = C^8_4 \left(\frac{x}{2}\right)^{8-5+1} (3)^{5-1}$$

تبسيط

$$= \frac{8!}{4!\,4!} \times \frac{x^4}{16} \times 81 \Rightarrow P_5 = \frac{2835}{8} x^4$$

مثال 5

جد الحدين الاوسطين في مفكوك $\left(\frac{3a}{2}-\frac{2}{3a}\right)^{7}$

الحل

∵ الاس عدد فردي فيوجد حدان اوسطان رتبتاهما

$$\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4 \quad ، \quad \frac{n+1}{2}+1=4+1=5$$

∴ الحدان الاوسطان هما الرابع والخامس

$$P_4 = C^7_3 \left(\frac{3a}{2}\right)^4 \left(\frac{-2}{3a}\right)^3$$

$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{81a^4}{16}\times\frac{-8}{27a^3}=\frac{-105}{2}a$$

$$P_5 = C^7_4 \left(\frac{3a}{2}\right)^3 \left(\frac{-2}{3a}\right)^4$$

$$=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\times\frac{27a^3}{8}\times\frac{16}{81a^4}=\frac{70}{3a}$$

مثال 6

بسط المقدار $(2-a)^4+(2+a)^4$ إلى ابسط صورة ثم جد قيمة المقدار عندما $a=\sqrt{3}$.

الحل

$$(2+a)^4=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5$$

$$(2-a)^4=p_1-p_2+p_3-p_4+p_5$$

بالجمع

$$(2+a)^4+(2-a)^4=2(p_1+p_3+p_5)$$

ضعف الحدود الفردية الترتيب في مفكوك $(2+a)^4$

وعندما تكون $a=\sqrt{3}$ تكون قيمة المقدار هي :

$$2[2^4+C^4_2\,2^2\,a^2+a^4]=2[16+24\times3+9]=2\times97=194$$

مثال 7

بسـط المقدار $\left(a+\frac{1}{a}\right)^5-\left(a-\frac{1}{a}\right)^5$ إلى ابسط صورة.

الحل

ضعف الحدود الزوجية الترتيب في مفكوك $\left(a+\frac{1}{a}\right)^5$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^5-\left(a-\frac{1}{a}\right)^5$$

$$=2(p_2+p_4+p_6)$$

$$=2\left[C^5_1\,a^4\left(\frac{1}{a}\right)+C^5_3\,a^2\left(\frac{1}{a}\right)^3+C^5_5\left(\frac{1}{a}\right)^5\right]=2\left[5a^3+\frac{10}{a}+\frac{1}{a^5}\right]$$

مثال 8 جد الحد الذي يحوي (a^8) في مفكوك $(3+a^2)^8$ ثم جد معامله.

الحل نفرض أن رتبة الحد الذي يحوي a^8 في مفكوك $(3+a^2)^8$ هي (r) فيكون :

$$P_r = C^8_{r-1}\ (3)^{8-r+1}\ (a^2)^{r-1}$$ القانون والتعويض

$$= C^8_{r-1}\ 3^{9-r}\ a^{2r-2}$$

$$\therefore a^8 = a^{2r-2}$$

$$8 = 2r - 2$$ اذا تساوت كميتان وتساوت الاساسات تساوت الاسس

$$2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

$$P_5 = C^8_4\ 3^4\ (a^2)^4$$ رتبة الحد الذي يحوي a^8 هو الخامس $r = 5$

$$= \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times 81 \times a^8$$

$$= 5670\ a^8$$ قيمة الحد

المعامل $= 5670$

مثال 9 جد الحد الخالي من (x) في مفكوك $(x^2 - \frac{1}{x})^{15}$.

الحل نفرض أن رتبة الحد الخالي من x [اي يحوي على x^0] هي (r) فيكون:

القانون والتعويض

$$P_r = C^n_{r-1}\ (x^2)^{n-r+1}\ (\frac{-1}{x})^{r-1}$$

$$= C^{15}_{r-1}\ (x)^{2(15-r+1)}\ (-1)^{r-1}\ (x^{-1})^{r-1}$$

$$= C^{15}_{r-1}\ x^{32-2r}\ (-1)^{r-1}\ (x)^{-r+1}$$

$$= C^{15}_{r-1}\ x^{33-3r}\ (-1)^{r-1}$$ اذا تساوت كميتان وتساوت الاساسات تساوت الاسس

$$\therefore x^{33-3r} = x^0$$

$$33 - 3r = 0$$ التبسيط

$$33 = 3r$$

$$r = 11$$ الناتج

الحد الخالي من (x) هو الحد الذي رتبته (11) فيكون :

$$P_{11} = C^{15}_{10} (x^2)^{15-11+1} (-1)^{11-1} (x)^{-11+1}$$

$$= C^{15}_{10}$$

$$= \frac{15!}{10! \times 5!}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3003$$ قيمة الحد الخالي من x

مثال 10 جد قيمة $(101)^3$.

الحل نضع 101 بشكل حدين 1 + 100

حدود المفكوك $(101)^3 = (1+100)^3$

التبسيط $= 1 + C^3_1 (100)^1 + C^3_2 (100)^2 + C^3_3 (100)^3$

الناتج $= 1 + (3)(100) + (3)(10000) + 1000000$

$= 1030301$

تمارين (4-1)

1- جد مفكوك كل مما يأتي :

a) $(3a-b)^4$

b) $(3x^2+2y)^3$

c) $(2x-\frac{1}{2x})^6$

2- جد الحد الثالث في مفكوك $(x-3y^2)^7$.

3- جد الحد السادس في مفكوك $(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3})^8$.

4- جد الحد الاوسط في مفكوك $(a-\frac{2}{a})^{12}$.

5- جد الحدين الاوسطين في مفكوك $(2a-1)^7$.

6- جد الحد الذي يحوي على x^4 في مفكوك $(1+x^2)^6$ ثم جد معامله .

7- جد معامل x^2 في مفكوك $(x^3+\frac{2}{x^2})^9$.

8- جد الحد الخالي من (x) في مفكوك $(x^2+\frac{2}{x^3})^{10}$.

9- جد قيمة $(99)^4$ (باستخدام مبرهنه ذي الحدين) .

10- جد قيمة $(98)^4-(102)^4$.

11- جد قيمة $(2-\sqrt{3})^7+(2+\sqrt{3})^7$.

الفصل الثاني

الغايات والاستمرارية

Limits And Continuity

[2-1] الجوار

[2-2] غاية الدالة

[2-3] غاية الدالة عندما $x \to a^+$

[2-4] غاية الدالة عندما $x \to a^-$

[2-5] بعض المبرهنات في الغايات

[2-6] استمرارية الدالة عند نقطة

[2-7] بعض المبرهنات في الاستمرارية

الغاية Limit

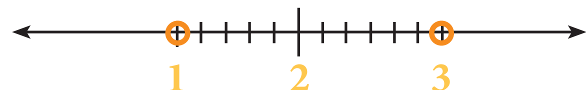
مقدمة

مفهوم الغاية limit من المفاهيم المهمة في الرياضيات وهي الاساس لمفاهيم اخرى مثل استمرارية الدالة continuity of function وكذلك في حساب التفاضل differentiation والتكامل integration .

[2-1] الجوار Neighbuorhood

لتوضيح مفهوم الجوار نعطي هذه المفاهيم البسيطة وصولاً الى مفهوم الجوار .

سبق ان تعلمت الفترات المفتوحة في الاعداد الحقيقة وتم توضيحها على خط الاعداد مثلاً الفترة المفتوحة (1 , 3) تمثل على خط الاعداد بالشكل :



نلاحظ ان العدد 2 ينتمي للفترة المفتوحة (1 , 3) وتوجد قيم في الفترة اكبر من العدد 2 وتكبر اقتراباً للعدد 3 . وكذلك توجد قيم أصغر من العدد 2 وتصغر اقتراباً للعدد 1

هذه القيم مثلاً 1.9999 ، 1.999 ، 1.99 ، 1.9 تقع جوار العدد 2 من اليسار وكذلك القيم 2.0001، 2.001 ، 2.01 ، 2.1 تقع جوار العدد 2 من اليمين تسمى هذه الفترة المفتوحة (1 , 3) جواراً للعدد 2

تعريف (2 – 1)

اذا كان a عدداً حقيقياً وكان $0 < \in$ (يقرأ ابسيلون) تسمى كل مما يأتي :

1- $(a - \in , a + \in)$ جواراً للعدد a

2- $(a - \in , a)$ جواراً للعدد a من اليسار

3- $(a , a + \in)$ جواراً للعدد a من اليمين

لذلك يوجد عدد غير منتهي من الجوارات للعدد a . وحسب قيم $\in$ الموجبة وكذلك ليس من الضروري أن a تنتمي لجوارها .

مثال 1

اذا كان $a = 2$ ، $\in = \frac{1}{2}$ اكتب جواراً للعدد a ثم اكتب جوار اليسار وجوار اليمين .

الحل

جوار العدد $a = 2$ هو الفترة المفتوحة $(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2})$

$\therefore$ جوار العدد $a = 2$ هو الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

جوار اليسار للعدد $a = 2$ هو الفترة المفتوحة $(2 - \frac{1}{2}, 2)$

$\therefore$ جوار اليسار للعدد a هو الفترة $(\frac{3}{2}, 2)$

جوار اليمين للعدد a هو الفترة $(2, 2 + \frac{1}{2})$

$\therefore$ جوار اليمين للعدد a هو الفترة $(2, \frac{5}{2})$

مثال 2

اذا كان $a = 1$ اكتب ثلاث جوارت للعدد a .

الحل

(1) $\because a = 1$ يمكن ان نختار $\frac{2}{5} = \in$

$\therefore$ جوار العدد 1 هو الفترة $(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}) = (1 - \frac{2}{5}, 1 + \frac{2}{5})$

(2) $\because a = 1$ نختار $\frac{3}{4} = \in$

$\therefore$ جوار العدد 1 هو الفترة $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}) = (1 - \frac{3}{4}, 1 + \frac{3}{4})$

(3) $\because a = 1$ يمكن ان نختار $\frac{1}{4} = \in$

$\therefore$ جوار العدد 1 هو الفترة $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}) = (1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4})$

[2-2] غاية الدالة Limit of Function

توجد بعض المفاهيم يمكن توضيحها قبل الدخول في غاية الدالة والتي هي :

1- $a \longrightarrow x$ تعني ان قيم x هي الاعدد الحقيقة القريبة جداً من العدد a يميناً ويساراً يمكن ان نقول ان قيم x هي الاعداد التي تنتمي الى جوارات العدد a .

مثلاً $x \longrightarrow 2$ تعني ان قيم x هي .... ، 2.0001 ، 2.001 ، 2.01 ، 2.1

وكذلك هي ... ، 1.9999 ، 1.999 ، 1.99 ، 1.9

2- $x \longrightarrow a^+$ تقرأ x تقترب من a من جهة اليمين اي ان قيم x تقترب اكثر فأكثر من العدد a تقع في جهة اليمين اي اكبر من a .

مثلاً $x \longrightarrow 1^+$ تعني ان قيم x هي .... ، 1.0001 ، 1.001 ، 1.01 ، 1.1

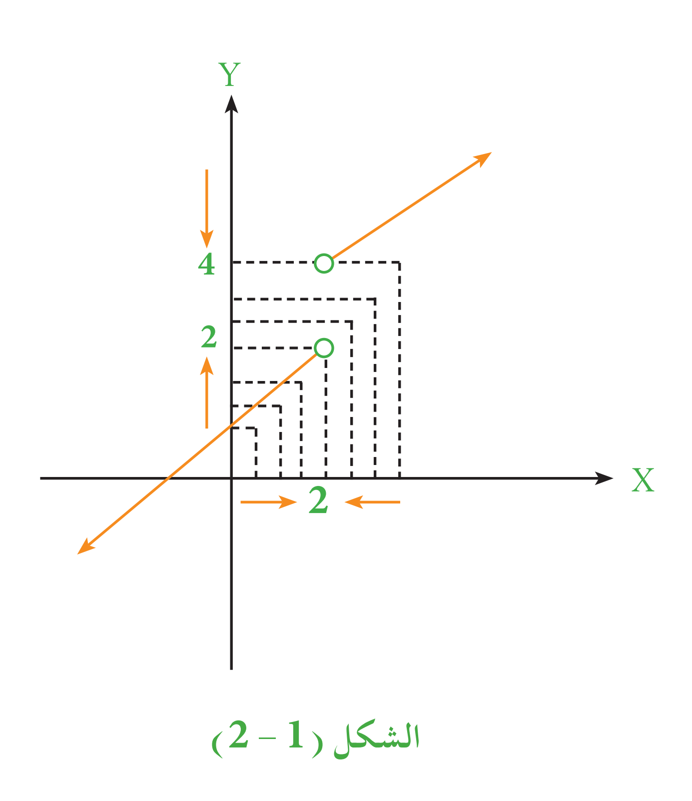
3- $x \longrightarrow a^-$ تقرأ x تقترب من العدد a من جهة اليسار اي ان قيم x تقترب اكثر فأكثر من العدد a تقع في جهة اليسار اي اصغر من a .

مثلاً $x \longrightarrow 1^-$ تعني ان قيم x هي .... ، 0.999 ، .... ، 0.99 ، 0.9

مثال 1

الآن سنوضح فكرة غاية الدالة بأستخدام التمثيل البياني للدالة موضحاً بالشكل (1 - 2) نلاحظ هندسياً ان منحنى الدالة f منفصل عند $x = 2$ نلاحظ عندما $x \longrightarrow 2$ من جهة اليسار (أقل من العدد 2) فإن قيم $y = f(x)$ تقترب من 2 ايضاً فيقال ان $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$

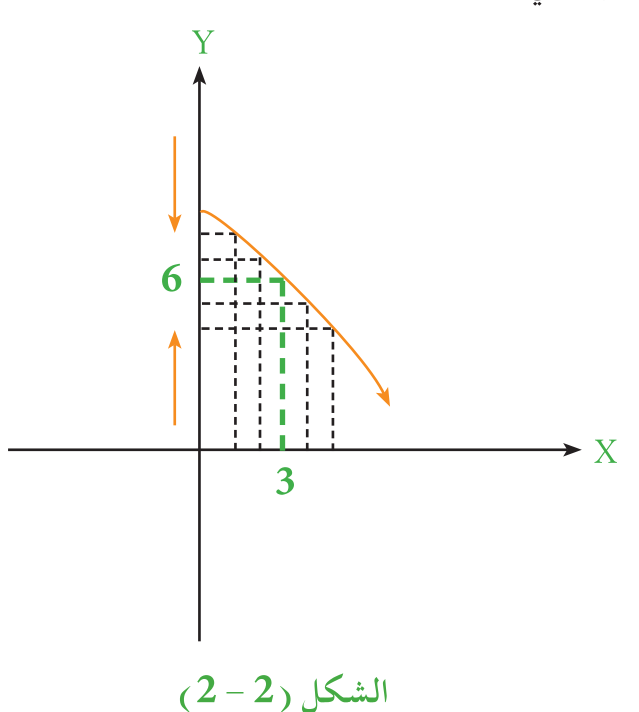
وكذلك نلاحظ عندما $2 \longrightarrow x$ من جهة اليمين (اكبر من العدد 2) فإن قيم $y = f(x)$ تقترب من 4 فيقال ان $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$ وتقرأ غاية الدالة f من اليمين تساوي 4 أي ان $y = f(x) \longrightarrow 4$ عندما $x \longrightarrow 2^+$



الشكل (1 – 2)



لاحظ الشكل الاتي (2–2) :



الشكل (2 – 2)

انه عندما $x \longrightarrow 3$ يميناً ويساراً فإن $y = f(x)$ تقترب من العدد 6 فيقال من ان $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$ تقرأ غاية الدالة f من اليمين واليسار وتساوي 6 عندما $x \longrightarrow 3$ لاحظ في الشكل (1 – 2) لم نتطرق عندما $x = 2$ الدالة معرفة اوغير معرفة والمهم ان الدالة معرفة بجوار العدد 2 وكذلك في الشكل (2–2) .

والآن سنوضح فكرة غاية الدالة بصورة آخرى .

مثال 3

$f(x) = x+3$ نبحث غاية الدالة f عندما $x \longrightarrow 4$ كما وضحنا سابقاً تعني ان قيم x قريبة جداً جداً من العدد 4 وتمثل جوارات العدد 4 يميناً ويساراً وعند تعويض هذه القيم في الدالة نحصل على قيم للدالة $f(x)$ كما في الجدول الآتي :

$x \longrightarrow 4^-$ $x \longrightarrow 4^+$

x	3.9	3.99	3.999	3.9999	....	4	....	4.0001	4.001	4.01	4.1
f (x)	6.9	6.99	6.999	6.9999	....	7	....	7.0001	7.001	7.01	7.1

$f(x) \longrightarrow 7$ $f(x) \longrightarrow 7$

من الجدول السابق يتبين لنا عندما $x \longrightarrow 4$ يميناً ويساراً فإن $f(x) \longrightarrow 7$ يميناً ويساراً وتكتب

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 7$ وتقرأ غاية الدالة f تساوي 7 عندما $x \longrightarrow 4$

مثال 4

لتكن $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ حيث $x \neq 2$ نبحث وجود غاية f عندما $x \longrightarrow 2$

سنوضح ذلك في الجدول بعد آخذ قيم x قريبة جداً جداً من العدد 2 يميناً ويساراً اي انه جوارات العدد2 ونعوضها في الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ونجد قيم $f(x)$ كما في الجدول الآتي :

$x \longrightarrow 2^-$ $x \longrightarrow 2^+$

x	1.9	1.99	1.999	....	2		2.001	2.01	2.1
f (x)	3.9	3.99	3.999	....	4		4.001	4.01	4.1

$f(x) \longrightarrow 4$ $f(x) \longrightarrow 4$

نلاحظ قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4 عندما قيم $x \longrightarrow 2$ ويرمز لها $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

ملاحظة : في المثالين لم نتطرق للعدد 2 اي انه $x = 2$ ليس مهما ان تكون f معرفة او غير معرفة عنده والمهم ان f معرفة في جوار العدد 2 .

[2-3] غاية الدالة عندما $x \to a^+$

احياناً تكون الدالة f معرفة عند جوار اليمين للعدد a فقط فيمكن ايجاد غاية الدالة f من اليمين فقط وسنوضح ذلك من خلال المثال الآتي :

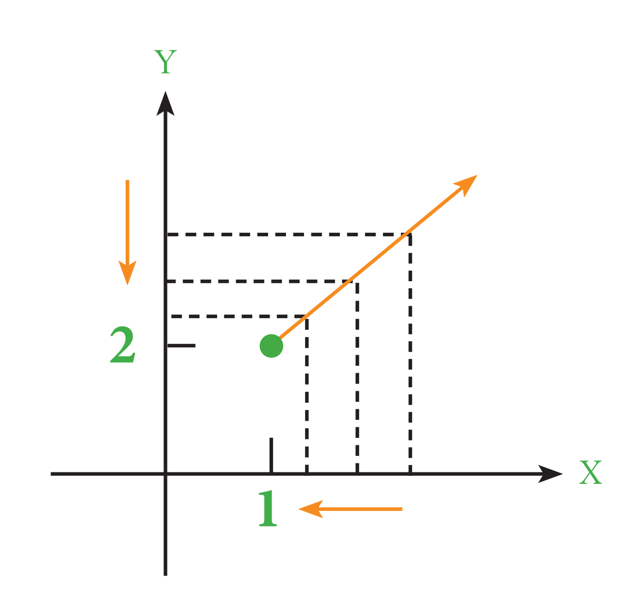
مثال 5

لتكن $f(x) = 2x$ حيث قيم $x \geq 1$ لنجد غاية f عندما $x \longrightarrow 1^+$ نستخدم الجدول الآتي لتوضيح سلوك الدالة f عندما قيم x تقترب من 1 من جهة اليمين فقط

$x \longrightarrow 1^+$

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	....	1
f (x)	2.2	2.02	2.002	2.0002	....	2

$f(x) \longrightarrow 2$



الشكل (2 − 3)

فيقال ان غاية f تساوي العدد 2 عندما $x \longrightarrow 1^+$ الغاية في اليمين فقط وتكتب $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

[2-4] غاية الدالة عندما $x \to a^-$

احياناً تكون الدالة f معرفة عند جوار العدد a من اليسار فقط يمكن ايجاد غاية الدالة f من اليسار فقط

سنوضح ذلك من المثال الآتي :

مثال 6

لتكن $f(x) = \sqrt{1-x}$ نبحث غاية الدالة f عندما $x \longrightarrow 1^-$

نلاحظ ان اوسع مجال للدالة f هو $\{x : x \in R, x \leq 1\}$ اي انه الدالة f معرفة يسار العدد 1 (الجوار الايسر للعدد 1) فقط في الجدول الآتي نوضح كيفية ايجاد غاية الدالة f من اليسار فقط .

$x \longrightarrow 1^-$

x	0.91	0.9991	0.999999991	......	1
f(x)	0.3	0.03	0.0003	......	0

$f(x) \longrightarrow 0$

فيقال ان غاية f تساوي العدد 0 عندما $x \longrightarrow 1^-$ من اليسار فقط . وتكتب $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$.

مثال 7

لتكن $f(x) = \frac{1}{x}$ حيث $x \neq 0$ لندرس سلوك الدالة

عندما $x \longrightarrow 0$ وهل للدالة f غاية عندما $x \longrightarrow 0$

$x \neq 0$ تعني أن قيم $x > 0$ أو $x < 0$

الآن ندرس سلوك الدالة عندما $x > 0$ اي انه $x \longrightarrow 0^+$ الاقتراب من اليمين بأتجاه العدد 0 الجدول الآتي يوضح ذلك :

$x \longrightarrow 0^+$

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	....	0
f(x)	10	100	1000	10000	....	؟

f(x) قيمها تتزايد وتكبر ولاتقترب من عدد ما

الجدول الآتي يوضح سلوك الدالة عندما $x \longrightarrow 0^-$ الاقتراب من اليسار بأتجاه العدد 0

$x \longrightarrow 0^-$

x	-0.1	-0.01	-0.001	.....	0
f(x)	-10	-100	-1000	.....	؟

f(x) قيمها تتناقص وتصغر ولاتقترب من عدد ما

من الجدولين يتضح لنا ان الدالة f ليس لها غاية عندما $x \longrightarrow 0$

Notes

ملاحظات مهمة في غايات الدوال

1- نحدد مجال الدالة f .

2- عندما $x \longrightarrow a$ لايجاد غاية الدالة f ليس من الضروري ان تكون a تنتمي لمجال الدالة اي انه $f(a)$ معرفة او غير معرفة ذلك غير مهم ، المهم أن الدالة معرفة جوار العدد a من اليمين او من اليسار.

3- اذا كانت $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$ وكانت $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$ موجودتين .

يقال ان للدالة f غاية عند a $\Leftrightarrow L_1 = L_2$

ويقال ان الغاية غير موجودة للدالة f عند a $\Leftrightarrow L_1 \neq L_2$

[2-5] بعض المبرهنات في الغايات

1- غاية الدالة $f(x)$ ان وجدت فهي وحيدة

وتعني : اذا كان $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$ و $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$

فإن $L_1 = L_2$

2- اذا كانت $f(x) = c$ حيث $c \in R$ عدد ثابت فإن

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

(غاية الدالة الثابتة = الثابت نفسه عند اي قيم تقترب منها x)

مثلاً

a) $\lim_{x \to 1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ، b) $\lim_{x \to 0} 3 = 3$ ، c) $\lim_{x \to -1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3- اذا كانت $f(x) = x$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = a$

اي ان : $\lim_{x \to a} x = a$

مثلاً

a) $\lim_{x \to -2} x = -2$ ، b) $\lim_{x \to \sqrt{3}} x = \sqrt{3}$ ، c) $\lim_{x \to \frac{1}{4}} x = \frac{1}{4}$

4– اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ ، $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودتين فإن:

$$\lim_{x \to a} [\, f(x) \mp g(x) \,] = \lim_{x \to a} f(x) \mp \lim_{x \to a} g(x)$$

مثالاً

a) $\lim_{x \to 1} (x+4) = \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 4$

$= 1 + 4 = 5$

b) $\lim_{x \to -5} (x-3) = \lim_{x \to -5} x - \lim_{x \to -5} 3$

$= -5 - 3 = -8$

5– اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة وكانت c عدد ثابت فإن:

$$\lim_{x \to a} c\, f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$



a) $\lim_{x \to 2} 4x = 4 \cdot \lim_{x \to 2} x = 4 \cdot (2) = 8$

b) $\lim_{x \to 0} -3x = -3 \lim_{x \to 0} x = -3\,(0) = 0$

6– اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ ، $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودتين فإن:

$$\lim_{x \to a} [\, f(x) \cdot g(x) \,] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$



a) $\lim_{x \to 2} x^2 = \lim_{x \to 2} x \cdot \lim_{x \to 2} x = 2 \times 2 = 4$

b) $\lim_{x \to 1} x(x+2) = \left(\lim_{x \to 1} x\right) \cdot \left(\lim_{x \to 1} (x+2)\right)$

$= \left(\lim_{x \to 1} x\right)\left(\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 2\right) = 1 \cdot (1+2) = 3$

استنتاج: $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ ، n عدد صحيح موجب

c) $\lim_{x \to -3} x^3 = (-3)^3 = -27$

7- اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ ، $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين وإن $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ فإن :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

مثلاً

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}(x+1)} = \frac{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1}$

$$= \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2}{x+2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^2-2)}{\lim_{x\to 3}(x+2)} = \frac{\lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 2}{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 2}$

$$= \frac{3^2-2}{3+2} = \frac{7}{5}$$

ملاحظة : هذه المبرهنات تبقى صحيحة عندما $x \to a$ من اليمين واليسار ويمكن حل التمارين والامثلة بأستخدام هذه المبرهنات كقواعد للحل .

مثال 8

جد قيمة ما يلي :

1) $\lim_{x\to -3} (x^3 + 2x)$





$$\lim_{x\to -3} x^3 + \lim_{x\to -3} 2x = (-3)^3 + 2 \cdot \lim_{x\to -3} x$$

$$= -27 + 2(-3) = -27 - 6$$

$$= -33$$

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+5}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}5}{\lim\limits_{x\to 0}2x+\lim\limits_{x\to 0}1}$$

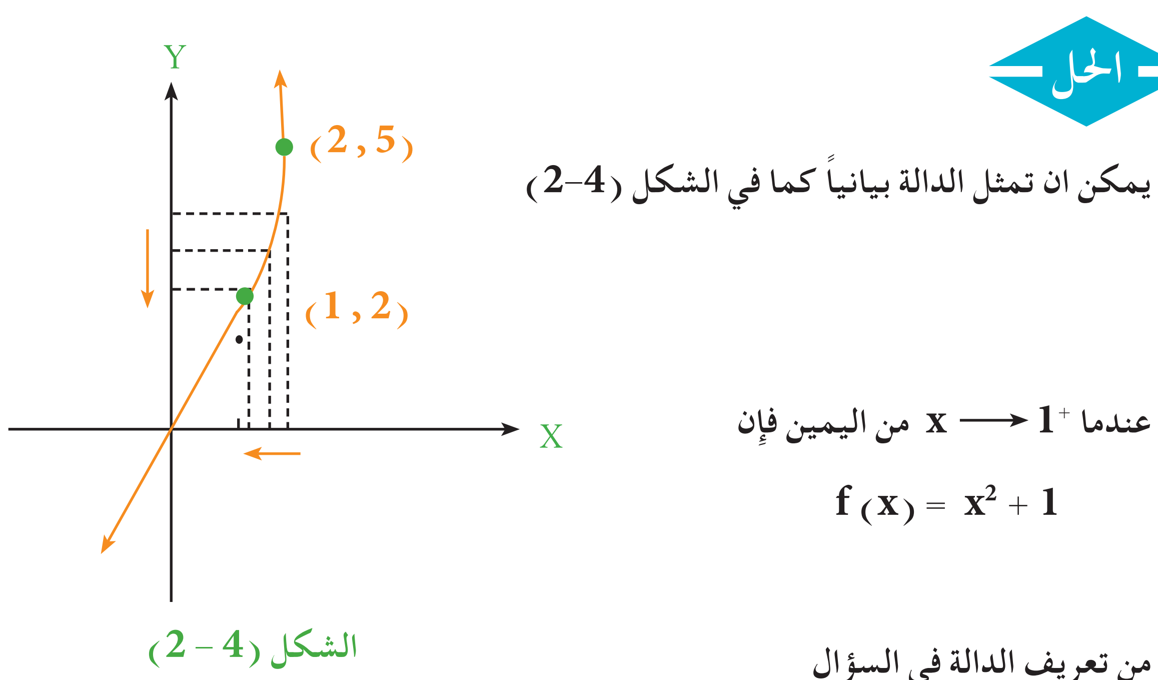
$$=\frac{0^2+5}{2(0)+1}=5$$

مثال 9 لتكن

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$$

هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x\longrightarrow 1$ ؟

الحل



الشكل (2 – 4)

يمكن ان تمثل الدالة بيانياً كما في الشكل (2–4)

عندما $x\longrightarrow 1^+$ من اليمين فإن

$$f(x)=x^2+1$$

من تعريف الدالة في السؤال

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}x^2+\lim_{x\to 1^+}1=1^2+1=2=L_1$$

عندما $x\longrightarrow 1^-$ من اليسار فإن $f(x)=2x$ من تعريف الدالة في السؤال

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x)=2\cdot\lim_{x\to 1^-}x=2\cdot 1=2=L_2$$

$$\because L_1=L_2$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ موجودة

ملاحظة : اذا كانت f دالة وأن $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة فإن :

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

حيث n عدد صحيح اكبر من 1 (اي انه 1 < n) ، وان $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$

عندما n عدد زوجي

مثال 10

جد قيمة $\lim_{x \to 1} \sqrt{4x + 5}$ حيث $x \geq \frac{-5}{4}$

الحل

تطبيق الملاحظة $\lim_{x \to 1} \sqrt{4x + 5} = \sqrt{\lim_{x \to 1} (4x + 5)}$

التعويض $= \sqrt{\lim_{x \to 1} 4x + \lim_{x \to 1} 5}$

التبسيط $= \sqrt{4(1) + 5} = \sqrt{9} = 3$

مثال 11

اذا كانت $f : \{x : x \geq -2 \text{ ، } x \in R\} \to R$ وان $f(x) = \sqrt{x + 2}$ جد $\lim_{x \to -2} f(x)$

الحل

$x \longrightarrow -2$ حسب مجال الدالة f

$$\therefore \lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \sqrt{x + 2}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to -2} (x + 2)} = \sqrt{\lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 2}$$

$$= \sqrt{-2 + 2} = \sqrt{0} = 0$$

مثال 12

جد قيمة $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ حيث $x \geq -1$ ، $x \neq 3$

الحل

لو عوضنا قيمة $x = 3$ في البسط والمقام مباشرة نحصل على قيمة المقدار $= \frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرّفة لذلك نضرب البسط والمقام بالعامل المرافق للبسط [لوجود الجذر في البسط] .

أي انه :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}) + \lim_{x\to 3} 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 1} + 2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}$$

مثال 13

لتكن $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \leq 2 \\ x+1 & x > 2 \end{cases}$ هل للدالة $f(x)$ غاية عند 2 ؟

ثم جد غاية الدالة $f(x)$ عند (-1) ، عند 4

الحل

1) عند تمثيل الدالة بيانياً كما موضح في الشكل (2-5) نلاحظ ان الغاية غير موجودة

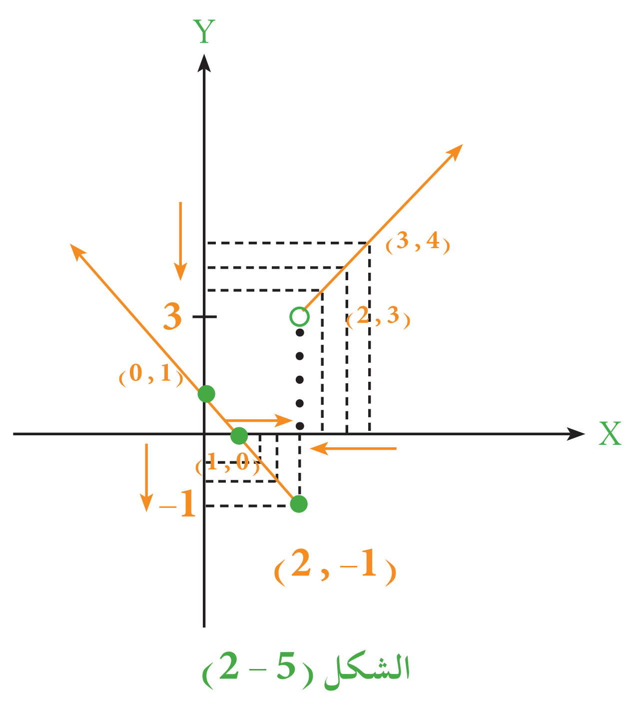
سنوضح ذلك كما يلي :

نجد الغاية من اليمين

عندما $x \to 2^+$ فإن $f(x) = x+1$ من تعريف الدالة في السؤال

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = \lim_{x\to 2^+} x + \lim_{x\to 2^+} 1$$

$$= 2 + 1 = 3 = L_1$$



الشكل (2 - 5)

نجد الغاية من اليسار

عندما $x \longrightarrow 2^-$ فإن $f(x) = 1 - x$ من تعريف الدالة في السؤال

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (1 - x) = \lim_{x \to 2^-} 1 - \lim_{x \to 2^-} x$$

$$= 1 - 2 = -1 = L_2$$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة لان $L_1 \neq L_2$

2) $\because -1 \in \{x : x \leq 2\}$

$$\therefore \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (1 - x) = 1 + 1 = 2$$

3) $\because 4 \in \{x : x > 2\}$

$$\therefore \lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x + 1) = 4 + 1 = 5$$

مثال 14 لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 1 \\ 2x + a & x > 1 \end{cases}$ وأن $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجودة جد قيمة a

الحل

$\lim_{x \to 1} f(x)$ موجودة فإن الغاية من اليسار $L_1 = L_2$ الغاية من اليمين

$$\lim_{x \to 1^+} (2x + a) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2)$$

تطبيق قواعد الغاية

$$\lim_{x \to 1^+} 2x + \lim_{x \to 1^+} a = \lim_{x \to 1^-} x^2 + \lim_{x \to 1^-} 2$$

التبسيط

$$2(1) + a = 1^2 + 2$$

$$2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$$

مثال 15

لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2+a & x>1 \\ b-2x & x\leq 1 \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجودة وان

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=5$ جد قيمتي $a\ ,\ b\in R$.

الحل

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=5$ وان $-1\in\{x : x\leq 1\}$ فإن $f(x)=b-2x$

$$\lim_{x\to -1}(b-2x)=5$$

تطبيق قواعد الغاية

$$\lim_{x\to -1} b-\lim_{x\to -1} 2x=5$$

$$b-2(-1)=5$$

التبسيط

$$b+2=5\Rightarrow b=3$$

وكذلك $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجودة

هذا تعني ان $L_1=L_2$

من اليسار $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ من اليمين

$$\lim_{x\to 1}(x^2+a)=\lim_{x\to 1}(b-2x)$$

$$\lim_{x\to 1} x^2+\lim_{x\to 1} a=\lim_{x\to 1} 3-\lim_{x\to 1} 2x$$

$$1^2+a=3-2(1)$$

$$1+a=1$$

$$\therefore\ a=0$$

مثال 16 اذا كانت $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = 2a + 3$ جد قيمة a



تطبيق قاعدة القسمة في الغايات

$$\frac{\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x - 1)}{\lim_{x \to 1} (x + 2)} = 2a + 3$$

تطبيق قواعد الغاية

$$\frac{\lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 3x - \lim_{x \to 1} 1}{\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 2} = 2a + 3$$

التعويض

$$\frac{1^2 + 3 - 1}{1 + 2} = 2a + 3$$

التبسيط

$$\frac{3}{3} = 2a + 3$$

$$1 = 2a + 3 \Rightarrow 1 - 3 = 2a$$

$$2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

مثال 17 جد قيمة $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$



اذا عوضنا عن $x = 3$ في البسط والمقام مباشرة نحصل على :

$$\frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$ وهذا غير معرف

لذلك يجب ان نبسط الدالة وكما يلي :

حيث $x \neq 3$,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

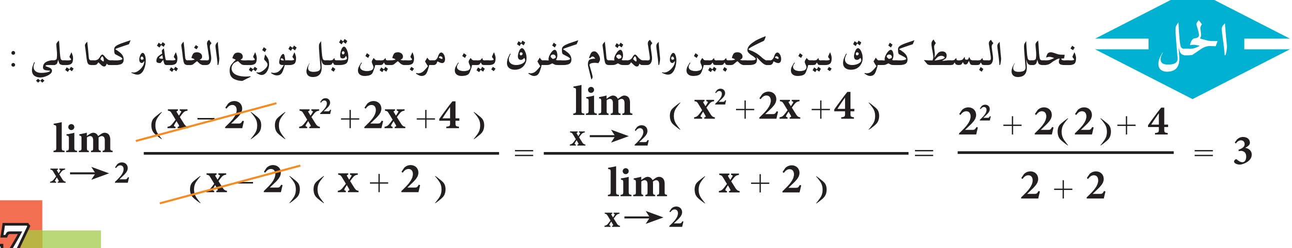
نحلل البسط كفرق بين مربعين

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 3)}{\cancel{(x - 3)}}$$

التعويض والتبسيط

$$\lim_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

مثال 18 جد قيمة $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$



الحل

نحلل البسط كفرق بين مكعبين والمقام كفرق بين مربعين قبل توزيع الغاية وكما يلي :

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{(x - 2)}(x + 2)} = \frac{\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4)}{\lim_{x \to 2} (x + 2)} = \frac{2^2 + 2(2) + 4}{2 + 2} = 3$$

تمارين (2-1)

1- جد قيمة كل مما يأتي :

1) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 1}{x + 1}$

3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 + 2x - 15}$

6) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 7x^2 - 8x}{3x^2 - 3}$

8) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$

9) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

10) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{3x} - 3}$

11) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x + 10} - 3}$

2- إذا كانت $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x + 3} = 3a - 4$ جد قيمة a حيث $a \in R$.

3- إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 8$ جد قيمة a ، $a \in R$.

4- اذا كانت $f(x) = ax^2 + bx$ وكانت $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \to -2} f(x) = 8$ جد قيمتي b ، a الحقيقيتين .

5- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x > 2 \\ 2 - 2x & x \leq 2 \end{cases}$$

a) هل للدالة f غاية عند 2 ؟ بين ذلك .

b) جد $\lim_{x \to 1} f(x)$

6- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ 2 - x & x < 2 \end{cases}$$

هل للدالة f غاية عندما $x \longrightarrow 2$ ؟ بين ذلك

7- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} a + 2x & x \leq -1 \\ 3 - x^2 & x > -1 \end{cases}$$

وكانت $\lim_{x \to -1} f(x)$ موجودة جد قيمة a حيث $a \in R$.

8- لتكن

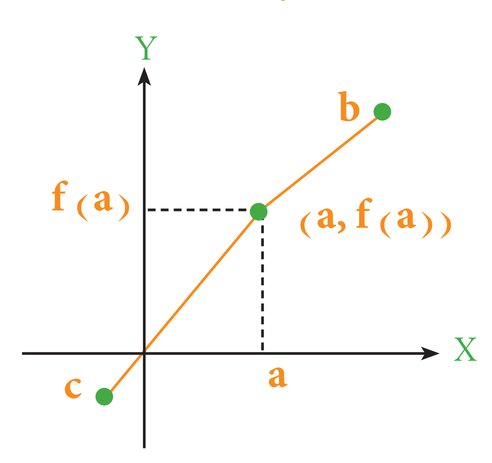
$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & x \geq 3 \\ x^2 - b & x < 3 \end{cases}$$

وكانت $\lim_{x \to 3} f(x)$ موجودة وأن $f(\sqrt{2}) = 5$ جد قيمة a ، $b \in R$.

[2-6] استمرارية الدالة عند نقطة
Continuity of a function at point

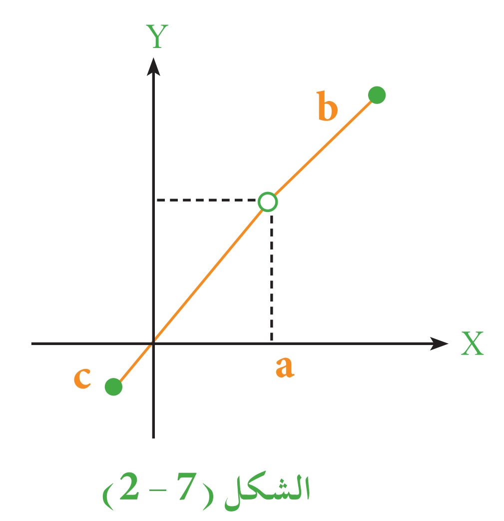
يمكن ان نوضح فكرة استمرارية الدالة عند نقطة من خلال الاشكال البيانية للدوال الآتية عند النقطة المبينة في كل شكل ففي الشكل (6 – 2) نلاحظ عندما نضع القلم في اقصى اليسار عند c ونحرك القلم بأتجاه b مروراً بالنقطة $(a, f(a))$.

اننا لا نرفع القلم اي ان الحركة تتم بدون رفع القلم.



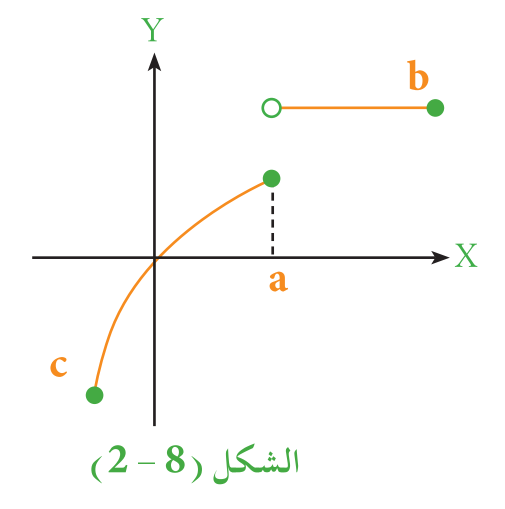
الشكل (6 – 2)

وفي الشكل (7 – 2) اذا تحركنا من c الى b فأننا نجد فجوة في النقطة $(a, f(a))$ نضطر لرفع القلم عبر الفجوة للذهاب الى b.



الشكل (7 – 2)

وكذلك الشكل (8 – 2) عندما نتحرك من c الى b نضطر لرفع القلم مسافة لوجود انقطاع في المنحني عند $x = a$.



الشكل (8 – 2)

من الاشكال الثلاث نلاحظ ان الشكل (6 – 2) يكون المنحني مستمر في النقطة $x = a$ فيقال ان الدالة مستمرة عندما $x = a$ بينما في الشكلين الاخرين وجود فجوة وانقطاع في المنحني عندما $x = a$ فيقال ان الدالة غير مستمرة عند $x = a$ سنوضح ذلك بالطريقة التالية وبأستخدام التعريف .

تعريف (2-2)

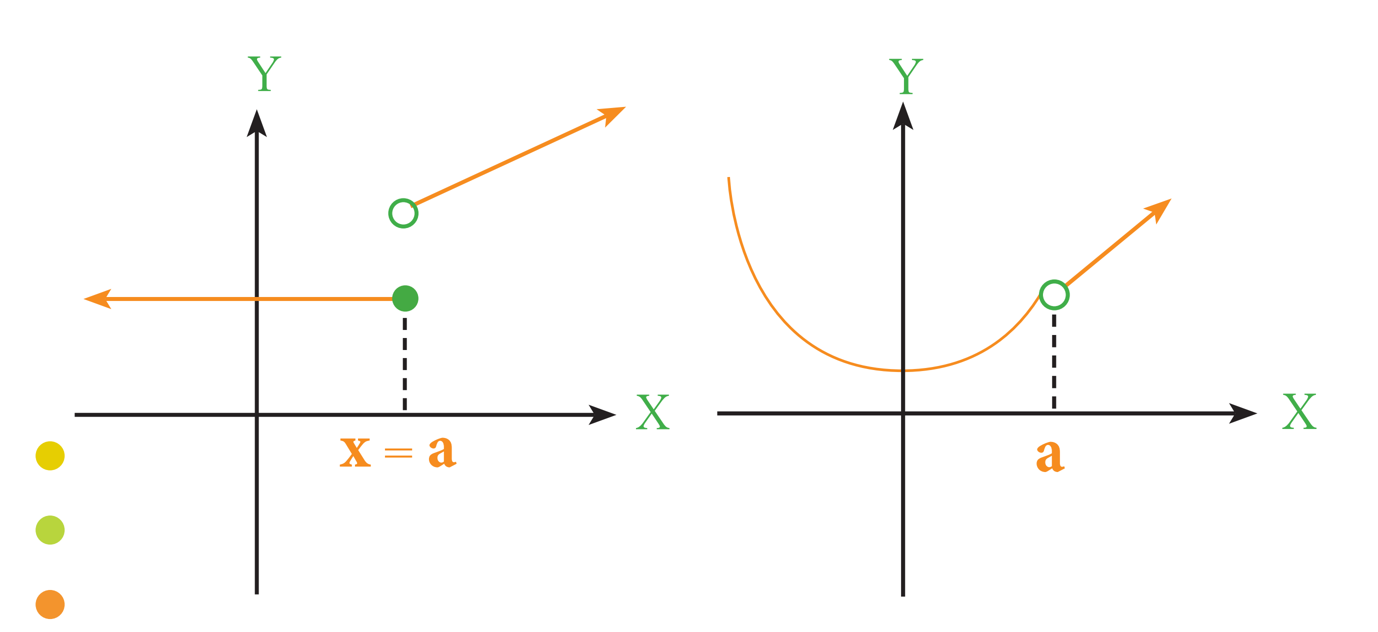
اذا كانت f دالة وكان العدد a ينتمي الى مجال الدالة f وتحقق ما يلي :

1– $f(a)$ موجودة وحقيقية

2– $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة وحقيقية

3– $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

فيقال ان الدالة f مستمرة عند النقطة $x = a$ واذا لم يتحقق اي شرط من الشروط الثلاث اعلاه فالدالة f غير مستمرة عند $x = a$



الشكل (10 – 2)

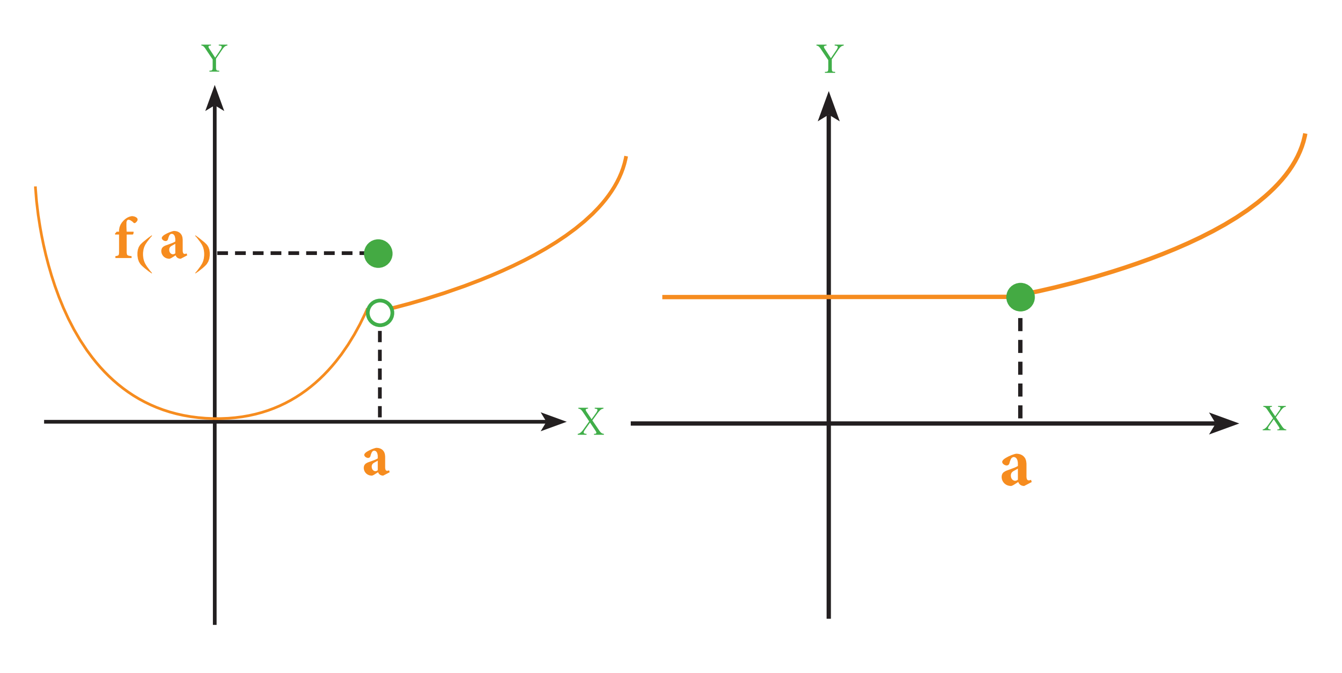
f دالة غير مستمرة عند $x = a$ لانه $f(a)$ غير معرفة او a لاتنتمي لمجال الدالة أي ان الشرط الاول غير متحقق في تعريف (2-2) .

الشكل (9 – 2)

f دالة غير مستمرة عند $x = a$ لان $L_1 \neq L_2$ حيث

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$

أي ان الشرط الثاني غير متحقق في تعريف (2-2)



الشكل (2 – 11)

f دالة غير مستمرة عند $x = a$ لانه

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

الشكل (2 – 12)

f دالة مستمرة عند $x = a$

مثال 1 اذا كانت $f(x) = x^2 + 3$ هل أن f مستمرة عند $x = 1$ ؟

الحل f كثيرة الحدود فإن اوسع مجال للدالة R

1) $f(1) = 1^2 + 3 = 4$

2) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 3)$

$= \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 3 = 1^2 + 3 = 4$

3) $\because \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore$ f مستمرة عند $x = 1$

[2-7] بعض المبرهنات في الاستمرارية

اذا كانت كل من الدالتين f , g مستمرتين عند $x = a$ فإن

الدالة $f \pm g$ مستمرة عند $x = a$

الدالة $f . g$ مستمرة عند $x = a$

الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة عند $x = a$ بحيث $g(a) \neq 0$

مثال 2 ابحث استمرارية الدالة حيث $f(x) = \frac{x}{x+1}$ عند $x = 3$.

الحل

اوسع مجال للدالة $= R \backslash \{-1\}$.

1) الدالة معرفة عند $x = 3$ وان $f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

وكذلك نبحث وجود الغاية

2) $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x}{x+1} = \frac{\lim_{x \to 3} x}{\lim_{x \to 3} (x+1)}$

$$= \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

3) $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = \frac{3}{4}$

$\therefore$ f مستمرة عند $x = 3$

مثال 3 ابحث استمرارية الدالة $f(x) = x^3 + x$ عند $x = 1$.



اوسع مجال للدالة $= R$

1) $\therefore$ f معرفة عند $x = 1$ وان $f(1) = 1^3 + 1 = 2$

2) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^3 + x) = \lim_{x \to 1} x^3 + \lim_{x \to 1} x$

$= 1^3 + 1 = 2$

3) $\because \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$

$\therefore$ f مستمرة عند $x = 1$

مثال 4 لتكن $f(x) = 3x + 2$ هل f مستمرة عند $x = a$ ؟ بين ذلك .

الحل اوسع مجال للدالة f هو R لكل $a \in R$ لنبرهن f مستمرة عند $x = a$.

1) $f(a) = 3a + 2$

2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (3x + 2)$

$= \lim_{x \to a} 3x + \lim_{x \to a} 2$

$= 3a + 2$

3) $\because \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ الدالة f مستمرة عند $x = a$

مثال 5 لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ هل f مستمرة عند $x = 0$ ؟

الحل

1) عند $x = 0$ فإن $f(x) = x^2 + 1$

$\therefore f(0) = 0^2 + 1 = 1$

لنبحث وجود $\lim_{x \to 0} f(x)$

2)

أولاً

الغاية من اليمين

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + \lim_{x \to 0^+} 1$

$= 0^2 + 1 = 1 = L_1$

ثانياً

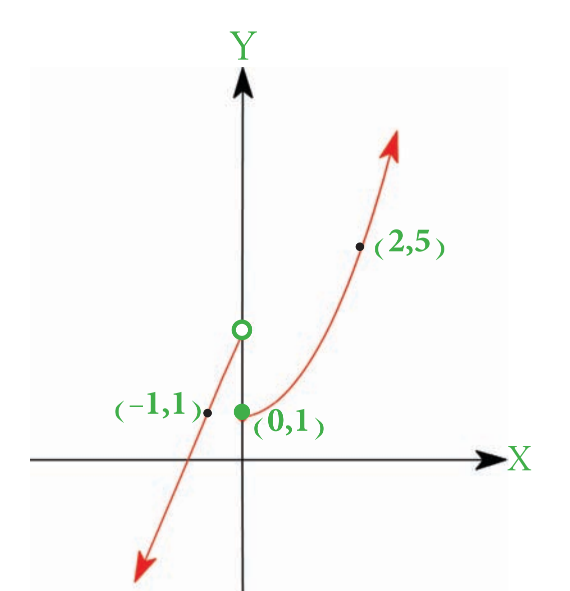
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+3)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} 2x + \lim_{x\to 0^-} 3 = 2(0) + 3$$

الغاية من اليسار $= 3 = L_2$

$\because L_1 \neq L_2$

$\therefore$ الغاية غير موجودة عند $x = 0$



$2x+3$	$x < 0$
x	y
0	3
−1	1
−2	−1
−3	−3

فجوة

x^2+1	$x \geq 0$
x	y
0	1
1	2
2	5
3	10

$\therefore$ f غير مستمرة عند $x = 0$



مثال 6 لتكن
$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x < -1 \\ 2x^2+1 & x \geq -1 \end{cases}$$
ابحث استمرارية الدالة f عند $x = -1$

الحل

عند $x = -1$ فإن $f(x) = 2x^2 + 1$

1) $f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 2(1) + 1 = 3$

2) لنبحث وجود $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$

أولاً

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (2x^2+1)$$

الغاية من اليمين

$$= 2(-1)^2 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = L_1$$

ثانياً

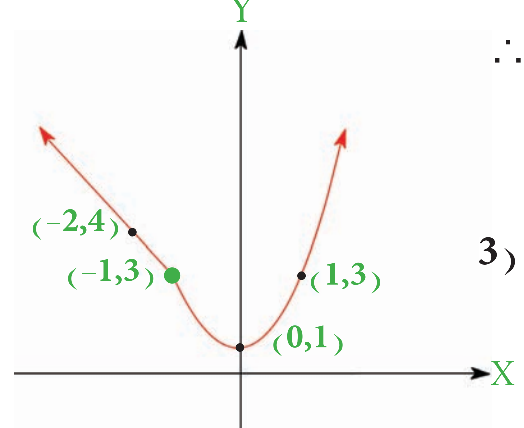
$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} (2 - x)$$

الغاية من اليسار

$$= 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 = L_2$$

$$\because \ L_1 = L_2 = 3$$

$$\therefore \ \lim_{x \to (-1)^-} f(x) = 3$$



$$3) \quad \because \ \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 3$$

∴ f مستمرة عند $x = -1$



لتكن $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 1$.

الحل

1) $f(1)$ معرفة حيث

$$f(1) = \frac{1+3}{1^2+1}$$

$$f(1) = \frac{4}{2} = 2$$

$$2) \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x^2+1}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 1} (x+3)}{\lim_{x \to 1} (x^2+1)} = \frac{1+3}{1^2+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$3) \quad \because \ \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$$

∴ f مستمرة عند $x = 1$

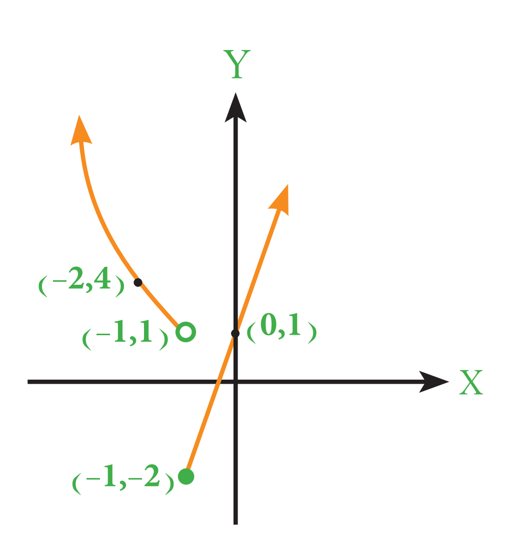


مثال 8

لتكن $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq -1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند $x=-1$.



الحل



$\because x=-1 \Leftarrow$

1) $f(x) = 3x+1$

$f(-1) = 3(-1)+1$

$= -3+1 = -2$

لنبحث وجود

2) $\lim_{x \to -1} f(x)$

لتكن $-1 \longrightarrow x$ من اليمين

$\therefore \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} (3x+1) = 3(-1)+1$

$= -3+1 = -2 \quad = L_1$

وكذلك $-1 \longrightarrow x$ من اليسار

$\therefore \lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} x^2 = (-1)^2 = 1 \quad = L_2$

$\because L_1 \neq L_2$

الغاية غير موجودة

$\therefore$ f غير مستمرة عند $x=-1$

تمارين (2-2)

1- لتكن $f(x) = x^3 + x^2 + 3$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 3$.

2- لتكن $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ اثبت f مستمرة في مجالها .

3- لتكن $f(x) = x^3$ ابحث استمرارية الدالة في مجالها .

4- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq -1 \\ 3x + 1 & x < -1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = -1$.

5- لتكن $f(x) = |x - 2|$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 2$.

6- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \leq 2 \\ 1 - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

اثبت ان f مستمرة عند $x = 2$.

7- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$

جد قيمة $a \in R$ اذا كانت f مستمرة عند $x = 1$.

8- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b & x \leq -1 \\ x^2 + a & x > -1 \end{cases}$$

جد قيمتي a ، $b \in R$ اذا كانت f مستمرة عند $x = -1$ وان $f(2) = 7$

الفصل الثالث

الإشتقاق

Differentiation

[3-1] المشتقة

تعريف (3 − 1)

يقال للدالة الحقيقية $y = f(x)$ إنها قابلة للاشتقاق عند x_0 الذي ينتمي إلى مجال الدالة إذا كانت الغاية الآتية موجودة

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

وان قيمة الغاية تسمى مشتقة الدالة في تلك النقطة ويرمز لها بالرمز $f'(x_0)$ او $\frac{dy}{dx}$ او y'

أي ان :
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مثال 1 إذا كان $f(x) = x^2$ جد $f'(3)$ باستخدام التعريف.



القانون
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

التطبيق
$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

التعويض
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - (3)^2}{\Delta x}$$

التبسيط
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9+6(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(6 + \Delta x)}{\Delta x}$$ استخراج عامل مشترك

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6 + 0 = 6$$ بالتعويض عن $\Delta x = 0$

مثال 2 إذا كان $f(x) = x^2 + x + 1$ جد $f'(2)$ باستخدام التعريف.

الحل

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$ التطبيق

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + (2 + \Delta x) + 1 - (4 + 2 + 1)}{\Delta x}$$ التعويض

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+4(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2 + \Delta x + 1 - 7}{\Delta x}$$ التبسيط

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(5 + \Delta x)}{\Delta x}$$ استخرج Δx عامل مشترك من البسط

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 5 + \Delta x$$

$$f'(2) = 5 + 0 = 5$$ بالتعويض عن $\Delta x = 0$

مثال 3

جد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ مستخدماً التعريف .

الحل

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (x+\Delta x) x} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال 4

جد مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مستخدماً التعريف .

الحل

القانون

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

التطبيق

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

الضرب في العامل المرافق للبسط

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

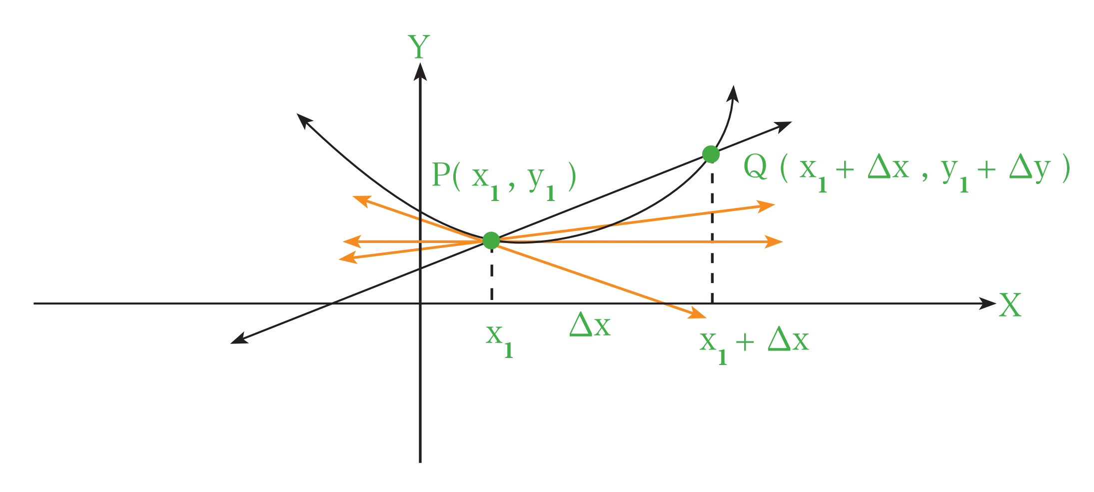
التبسيط

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

بالتعويض عن $\Delta x = 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[3-2] التفسير الهندسي لمشتقة الدالة



الشكل (3 - 1)

لتكن $y = f(x)$ دالة حقيقية ، $p(x_1, y_1)$ نقطة معينة على منحني الدالة وكانت $Q(x_2, y_2)$ نقطة اخرى على المنحني فإن :

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

من الرسم يتضح :

$$y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x)$$
$$y_1 = f(x_1)$$

بالطرح

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

بالقسمة على $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

واذا كانت x_1 معينة واخذنا Δx تصغر شيئاً فشيئاً وتقترب الى الصفر عندها الميل (m) يقترب الى قيمة معينة نقول عن تلك القيمة غايتها وعليه سيكون ميل المماس للمنحني في النقطة p

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

وهي تمثل ميل المماس عند النقطة P ويعبر عنها باحدى التعابير الاتية : $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$

∴ المشتقة الاولى للدالة عند نقطة التماس = ميل المماس عند تلك النقطة

معادلة المماس لمنحني الدالة عند نقطة

اذا كانت $y = f(x)$ دالة ولتكن (x_1 , y_1) نقطة على منحني الدالة فإن معادلة المستقيم المماس لمنحني الدالة $y = f(x)$ والمار بالنقطة (x_1 , y_1) تكون :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال 5

اذا كان $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ جد باستخدام التعريف $f'(2)$ ثم جد معادلة المماس للمنحني عند $x = 2$

الحل

نعوض عن $x=2$ لنجد نقطة التماس

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1 = 15 \Rightarrow (2,15)$$

القانون

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

التطبيق

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

التعويض

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(2+\Delta x)^2 + 3(2+\Delta x) + 1 - 15}{\Delta x}$$

التبسيط

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 8\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 6 + 3(\Delta x) + 1 - 15}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11(\Delta x) + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (11 + 2(\Delta x)) = 11 + 0 = 11$$

ميل المماس للمنحني عند $(2,15)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 15 = 11(x - 2)$$

معادلة المماس $\Rightarrow 11x - y - 7 = 0$

[3-3] بعض التطبيقات على المشتقة

الازاحة والزمن مقادير فيزيائية اساسية تستطيع قياسها .

نفترض في زمن (t) ان جسماً كان في الموقع $s = f(t)$

وفي زمن $t + \Delta t$ الجسم يكون في الموقع :

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t)$$
$$s = f(t)$$

بالطرح

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

بما ان معدل السرعة هو الفرق بين المسافتين مقسوم على الفرق بين الزمنين وعليه يمكن ان نقول ان معدل السرعة تكون Δs مقسوماً على Δt

$$\therefore \text{السرعة} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

في هذا القانون عندما Δt تصغر وتقترب الى الصفر فإن معدل السرعة تصبح السرعة الآنية للجسم في تلك اللحظة . ونرمز لها بالرمز $v(t)$

اي ان :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

لكن المعادلة الاخيرة هي نفس تعريف المشتقة .

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

وبما ان التعجيل يمثل معدل السرعة بالنسبة للزمن فإن مشتقة السرعة الانية يكون تعجيل الجسم $(a(t))$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

مثال 6 لتكن $f(t) = 2t^2 + 3$ تمثل حركة جسم في اي لحظة بالامتار جد موقع الجسم وسرعته بعد 2 ثانية من بدأ الحركة.

الحل

$$f(t) = 2t^2 + 3$$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3$$

موقع الجسم $= 8 + 3 = 11$ متر

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(2+\Delta t) - f(2)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(2+\Delta t)^2 + 3 - 11}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8 + 8\Delta t + 2(\Delta t)^2 - 8}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\,(8 + 2(\Delta t))}{\Delta t} = 8 + 2(0) = 8$$ متر / ثا

سرعة الجسم بعد 2 ثانية

مثال 7 لتكن $v(t) = 3t^2$ جد التعجيل بعد 2 ثانية.

الحل

$$a(2) = v'(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(2+\Delta t) - v(2)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(2+\Delta t)^2 - 3(2)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12 + 12(\Delta t) + 3(\Delta t)^2 - 12}{\Delta t}$$

$$\therefore\ a(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(12 + 3(\Delta t))}{\Delta t} = 12 + 0 = 12$$ التعجيل م/ثا^2

تمارين (1-3)

1- جد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 + 5x$ باستخدام التعريف ثم احسب $f'(3)$, $f'(0)$

2- جد المشتقة بطريقة التعريف لكل مما يأتي :

a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$

3- اذا كانت $f(x) = x^2 - 3x - 4$ جد $f'(x)$ مستخدما التعريف ثم جد معادلة المماس

لمنحني الدالة عند $x = 1$

4- جسم يتحرك وفق العلاقة حيث f الازاحة بالامتار معطاة بالعلاقة $f(t) = t^2 + 2t + 1$

جد سرعة الجسم بعد 3 ثواني من بدأ الحركة.

5- اذا كانت السرعة معطاة بالعلاقة $v(t) = t^2 + t + 1$ م/ثا . جد التعجيل عند $t = 1$ ثانية .

3-4 قواعد الاشتقاق

القاعدة الاولى :

الدالة الثابتة تكون دائما قابلة للاشتقاق وان مشتقتها صفرا

اي اذا كانت $y = f(x) = C$ دالة ثابتة $C \in R$

فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(C) = 0$$

مثال 8 جد $f'(x)$:

$$a)\ f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$$
$$b)\ f(x) = \sqrt{5} \Rightarrow f'(x) = 0$$
$$c)\ f(x) = 3a \Rightarrow f'(x) = 0$$

القاعدة الثانية :

اذا كانت $f(x) = x^n$

فإن :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

مثال 9 جد مشتقة الدوال الآتية :

$$a)\ f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$b)\ f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

$$c)\ f(x) = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$d)\ f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$e)\ g(t) = \sqrt[5]{t} \Rightarrow g(t) = t^{\frac{1}{5}} \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5t^{\frac{4}{5}}}$$

القاعدة الثالثة :

مشتقة مقدار ثابت مضروب في دالة قابلة للاشتقاق تساوي الثابت في مشتقة تلك الدالة .

حيث ان C عدد حقيقي $f(x) = cg(x) \Rightarrow f'(x) = cg'(x)$

مثال 10 جد $f'(x)$:

$$a)\ f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3(2x) = 6x$$

$$b)\ f(x) = 5x^4 \Rightarrow f'(x) = 5(4x^3) = 20x^3$$

القاعدة الرابعة :

مشتقة مجموع (طرح) عدد منتهي من الدوال القابلة للاشتقاق تساوي مجموع (طرح) مشتقات تلك الدوال اذا كان

$$f(x) = g(x) \mp h(x)$$

فأن

$$f'(x) = g'(x) \mp h'(x)$$

مثال 11 جد $f'(x)$:

$$a)\ f(x) = 3x^5 + 7x \Rightarrow f'(x) = 15x^4 + 7$$

$$b)\ f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x \Rightarrow f'(x) = 4x + \frac{1}{2}$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 9 \Rightarrow f'(x) = x - 4x^2$$

القاعدة الخامسة :

مشتقة حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق يساوي

الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الاولى

اذا كانت $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

فإن : $f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) g'(x)$

مثال 12 جد $f'(x)$:

$$a)\ f(x)=(x^4-x^2+1)(5x^6-3x)$$

$$f'(x)=(x^4-x^2+1)(30x^5-3)+(5x^6-3x)(4x^3-2x)$$

$$b)\ f(x)=\sqrt{x}\,(x+6) \Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}}(x+6)$$

$$f'(x)=x^{\frac{1}{2}}(1)+(x+6)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$$

القاعدة السادسة :

مشتقة قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق يساوي

$$\frac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}}$$

اذا كان $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ وان $h(x)\neq 0$

فإن :

$$f'(x)=\frac{h(x).g'(x)-g(x)\ h'(x)}{[\ h(x)\ ]^2}$$

مثال 13 جد مشتقة الدالة عند $x=1$ اذا كانت

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^4+1}$$

$$f'(x)=\frac{(x^4+1)(3x^2)-(x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(1^4+1)(3(1)^2)-(1^3+1)(4(1)^3)}{(1^4+1)^2}$$

$$=\frac{2\times3-2\times4}{2^2}=\frac{6-8}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

القاعدة السابعة :

مشتقة دالة مرفوعة الى أس حقيقي

اذا كانت الدالة $h(x)$ قابلة للاشتقاق فان الدالة $f(x)$ تكون قابلة للاشتقاق حيث

$$f(x) = [h(x)]^n$$

فإن

$$f'(x) = n[h(x)]^{n-1} \cdot h'(x)$$

مثال 14 جد $f'(x)$ في كل مما يأتي :-

$$a)\ f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^5$$

$$f'(x) = 5(x^3 + x^2 + x + 1)^4 (3x^2 + 2x + 1)$$

$$b)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$ مشتقة داخل القوس

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)^{-\frac{1}{2}}(2x - 2)$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$$

$$c)\ f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$$ ، جد $f'(x)$ عند نقطة $x = 1$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \frac{(x+1)(1)-(x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = 4\left(\frac{1}{1+1}\right)^3 \times \frac{2-1}{(1+1)^2}$$

$$f'(1) = 4 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

ملاحظة

لتكن $y = f(x)$ دالة مشتقتها $f'(x)$ ويطلق عليها المشتقة الاولى للدالة $f(x)$ وهي دالة لنفس المتغير x وعليه فان المشتقة الثانية هي مشتقة المشتقة الاولى ويرمز $f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}$

مثال 15 اذا كانت $y = x^4 + 5x^3 + 3$ جد y', y''



$$\because \; y = x^4 + 5x^3 + 3$$

$$\therefore \; y' = 4x^3 + 15x^2$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

مثال 16 اذا كانت $f(x) = 2x^3 + 4 + \frac{3}{x}$ جد $f'(x), f''(x), f''(-1)$



$$\because f(x) = 2x^3 + 4 + 3x^{-1}$$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 3x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - \frac{3}{x^2}$$

$$f''(x) = 12x + 6x^{-3} \Rightarrow f''(x) = 12x + \frac{6}{x^3}$$

$$\therefore f''(-1) = 12(-1) + \frac{6}{(-1)^3} = -12 - 6 = -18$$

تمارين (2-3)

1- جد باستخدام القواعد مشتقة كل من الدوال التالية عند العدد المؤشر ازائها :

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1 \quad , x = 1$

b) $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3) \quad , x = 2$

c) $f(x) = \dfrac{4 - 5x}{x^2 + x + 1} \quad , x = -1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1}} \quad , x = 0$

e) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2 + 2} \quad , x = -1$

2- اذا كانت $f(x) = (x^2 - 3)^4$ جد $f'(x), f''(x)$ عند $x = 2$.

3- اذا كانت $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 3)^{\frac{3}{2}}$ جد $f'(x), f'(2)$

[3-5] التطبيقات الهندسية والفيزياوية للمشتقة

مثال 17 جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x)=x^2-5x+2$ عند $x=1$.

الحل

∴ النقطة $(1,-2)$ $\qquad f(1)=1-5+2=-2$

ميل المماس $\qquad f'(x)=2x-5 \Rightarrow f'(1)=2(1)-5=-3$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y+2=-3(x-1)$$

معادلة المماس $\qquad y+2=-3x+3 \Rightarrow y+3x-1=0$

مثال 18 جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$ عند $x=5$.



$$\because f(x)=(x+3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}(1)$$

نعوض في المعادلة الاصلية $x=5$

∴ النقطة $(5,2)$ $\qquad f(5)=\sqrt[3]{5+3}=2 \quad \Rightarrow$

ميل المماس عند اية نقطة

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{3(x+3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(5)=\frac{1}{3(5+3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\times 8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{12}$$

حيث ان $m=f'(5)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-2=\frac{1}{12}(x-5) \Rightarrow 12y-24=x-5$$

معادلة المماس $\qquad \Rightarrow 12y-x-19=0$

مثال 19 جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني $y=\frac{2x+1}{3-x}$ عندما $y=5$

الحل

$$5=\frac{2x+1}{3-x}\Rightarrow 2x+1=15-5x$$

$$\Rightarrow x=\frac{14}{7}=2$$

$\therefore$ النقطة $(2,5)$

$$y'=\frac{(3-x)(2)-(2x+1)(-1)}{(3-x)^2}=\frac{7}{(3-x)^2}$$

ميل المماس

$$f'(2)=\frac{7}{(3-2)^2}=7=m$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

معادلة المماس

$$y-5=7(x-2)\Rightarrow y-5=7x-14\Rightarrow y-7x+9=0$$

ميل العمود $=\frac{-1}{7}$ (ميل العمود يساوي مقلوب ميل المماس بعكس الاشارة)

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

معادلة العمود

$$y-5=\frac{-1}{7}(x-2)\Rightarrow 7y-35=-x+2\Rightarrow 7y+x-37=0$$

مثال 20

جد معادلة المماس للمنحني $y= x^2 + 1$ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات



نقطة التقاطع مع محور الصادات يعني $x = 0$

$$y = 0 + 1 = 1$$

∴ النقطة هي $(0,1)$

$$y = x^2 + 1$$

ميل المماس للمنحني $y' = 2x = 2(0) = 0 = m$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 0(x - 0)$$

∴ معادلة المماس $y - 1 = 0$

مثال 21

جد نقطة تنتمي الى المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y + 2x + 3 = 0$



ميل المستقيم المعلوم $= \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$

∴ ميل المستقيم $= \frac{-2}{1}$

ميل المماس -2 = ميل المستقيم المعلوم ، لانهما متوازيان

$$\because \quad f'(x) = 2x - 4$$

$$\therefore \quad 2x - 4 = -2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

نعوض في المعادلة الاصليه لاستخراج قيمة y

$$y = 1^2 - 4(1) + 5$$

$$y = 2$$

∴ النقطة $(1,2)$

مثال 22

اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + ax + b$ وكان ميل المماس للمنحني عند $x = -1$ هو 4 وكان المنحني يمر بالنقطة $(-3,2)$ جد قيمة a , b الحقيقيتين .

الحل

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$f'(x) = 2x + a \quad , f'(x) = 4$$

$$4 = 2(-1) + a \Rightarrow a = 6$$

نعوض $(-3,2)$ بالدالة الاصلية

$$2 = (-3)^2 + 6(-3) + b$$

$$2 = 9 - 18 + b \Rightarrow b = 11$$

مثال 23

جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 1$ حيث $s(t)$ تقاس بالامتار والزمن بالدقائق جد موضعه وسرعته وتعجيله بعد (5) دقائق من بدأ حركته .

الحل

التعويض $s(5) = 5^3 + 3(5)^2 + 4(5) + 1$

الموقع التبسيط $s(5) = 125 + 75 + 20 + 1 = 221$ متر

الاشتقاق الاول $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 6t + 4$

السرعة $v(5) = 3(5)^2 + 6x5 + 4 = 75 + 30 + 4 = 109$ م / دقيقة

الاشتقاق الثاني $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t + 6$

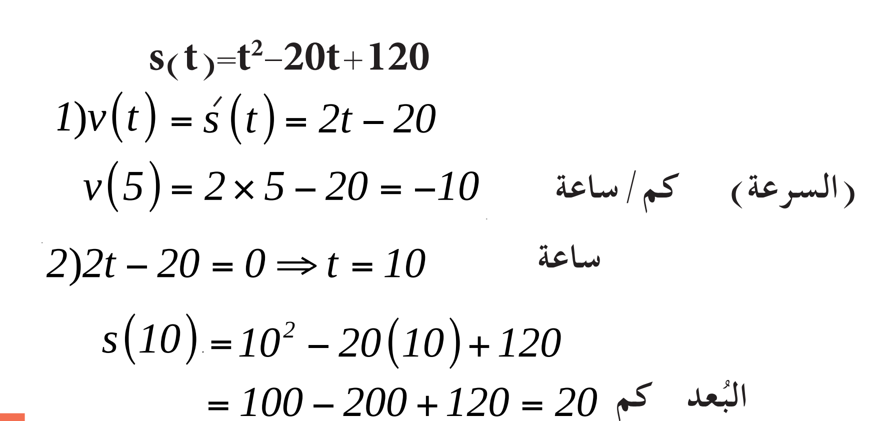
التعجيل $a(5) = 6(5) + 6 = 36$ م / (دقيقة)^2

مثال 24

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^2 - 20t + 120$ حيث يقاس البعد بالكيلو مترات والزمن بالساعة . احسب :

1) السرعة بعد خمس ساعات .
2) بُعده عندما تصبح سرعته صفرا .

الحل



$$s(t) = t^2 - 20t + 120$$

$$1)\ v(t) = s'(t) = 2t - 20$$

(السرعة) $v(5) = 2 \times 5 - 20 = -10$ كم / ساعة

$$2)\ 2t - 20 = 0 \Rightarrow t = 10$$ ساعة

$$s(10) = 10^2 - 20(10) + 120$$

البُعد $= 100 - 200 + 120 = 20$ كم

مثال 25 يتحرك جسم على خط مستقيم وحسب العلاقة $s(t)=\sqrt{2t+1}$ اوجد الزمن الذي يستغرقه حتى تصبح سرعته $\frac{1}{3}$ م/ثا .

الحل

رفع الجذر = الاس / دليل الجذر

$$s(t)=(2t+1)^{\frac{1}{2}}$$

الاشتقاق

$$v(t)=\acute{s}(t)=\frac{1}{\cancel{2}}(2t+1)^{\frac{-1}{2}}\times\cancel{2}$$

التبسيط

$$v(t)=\frac{1}{(2t+1)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{(2t+1)^{\frac{1}{2}}}$$

بالتربيع

$$(2t+1)^{\frac{1}{2}}=3$$

$$2t+1=9\Rightarrow t=4$$ ثانية

مثال 26 قذف جسم نحو الاعلى عن سطح الارض بأزاحة معطاة وفق العلاقة $s(t)=96t-16t^2$ حيث ان $s(t)$ الازاحة بالامتار ، t بالثواني . احسب :

1) سرعة الجسم بعد ثانيتين .

2) متى تصبح سرعته صفراً ؟

الحل

1)

$$s(t)=96t-16t^2$$

$$v(t)=\acute{s}(t)=96-32t$$

$$\acute{s}(2)=96-32\times2=32$$ م/ثا السرعة بعد 2 ثانية

2) عندما تصبح سرعته = صفر

$$v(t)=96-32t\quad,\ v(t)=0$$

$$0=96-32t$$

$$32t=96\Rightarrow t=\frac{96}{32}=3$$ ثانية

مثال 27 اذا تحرك الجسم وفق العلاقه $s(t) = t^3 - 6t^2 + 18t + 12$ حيث $s(t)$ بالامتار، t الزمن بالثانية ، احسب بعد الجسم عن نقطة بداية الحركه وسرعته عندما يصبح تعجيله صفرا .



$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 18t + 12$$

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 18$$

$$v'(t) = 6t - 12$$

$6t - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{6} = 2$ ثانية

$$s(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 18(2) + 12$$

$= 8 - 24 + 36 + 12 = 32$ متر   بعد الجسم عن نقطة بداية الحركة

$$v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 18$$

$= 12 - 24 + 18 = 6$ متر / ثا   السرعة

[3-6] بعض تطبيقات المشتقة في الاقتصاد

في الاقتصاد يمكن اعتبار كمية ما كدالة لمتغيرمستقل واحد يمثل كمية اقتصادية فمثلا دالة التكلفة الكلية (**total cost function**) وسنرمز لها $c(x)$ ، وهي داله لمتغير **x** يمثل حجم الانتاج . ويطلق على $\acute{c}(x)$ داله الكلفة الحدية وسنرمز لها **MC** اما معدل الكلفة سنرمز لها **AC** وتساوي $\frac{c(x)}{x}$

اما معدل الكلفه الحدية فهي $\frac{d}{dx}(AC)$

مثال 28 لنفرض ان دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة ما $c(x) = 3x^2 - 60x + 1200$ جد :

a) دالة الكلفة الحدية.

b) دالة معدل الكلفة .

c) دالة معدل الكلفة الحدية .

d) حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة والكلفة الكلية.



دالة الكلفة الحدية

$$a)MC = \acute{c}(x) = 6x - 60$$

$$b)AC = \frac{c(x)}{x} = \frac{3x^2 - 60x + 1200}{x}$$

دالة معدل الكلفة

$$= 3x - 60 + \frac{1200}{x}$$

دالة معدل الكلفة الحدية

$$c)\frac{d}{dx}(AC) = \frac{d}{dx}\left(3x - 60 + \frac{1200}{x}\right) = 3 - \frac{1200}{x^2}$$

لايجاد حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة نجعل المشتقة الاولى **AC** صفراً

$$3 - \frac{1200}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1200 = 0 \Rightarrow x = 20$$

والكلفة الكلية

$$c(20) = 3(20)^2 - 60(20) + 1200 = 1200$$

تمارين (3-3)

1- جد معادلة مماس المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ عند $x = 0$

2- جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y = (x-3)^3$ عند $x = 2$

3- جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = x^3 - 2x + \frac{3}{x^2+2}$ عند $x = -1$

4- جد النقط على المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بحيث يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات .

5- جد نقطة على المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ عندما يكون مماس المنحني يوازي المستقيم $2x - y = 0$

6- جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان بعده بالامتار والزمن بالثواني معطى بالعلاقة $s(t) = \sqrt{2t^2 + 18}$ احسب بعده عندما تصبح السرعة **1** متر / ثا .

7- اذا تحرك جسم وفق العلاقه $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$ حيث ان s بعده بالامتار ، t الزمن بالثواني احسب

a) بعد الجسم من نقطة بدايه الحركة عندما تصبح سرعته صفراً .

b) بعد الجسم من نقطة بدايه الحركة عندما يصبح التعجيل صفراً .

8- لنفرض ان الكلفه الكليه لصنع **x** من وحدات سلعة ماهي $c(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$
جد الكلفه الحديه عندما يكون عدد الوحدات المصنوعة **50**.

9- لتكن دالة الكلفه الكليه $c(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ جد دالة الكلفة الحدية ، دالة معدل الكلفة الكلية .

[3.7] النهايات العظمى و الصغرى

غالبا مانصادف في حياتنا العملية مسائل يستوجب انجازها إيجاد النهايات العظمى أوالنهايات الصغرى وكذلك يمكن استخدامها في رسم مخطط بعض الدوال .

تعريف (3-2)

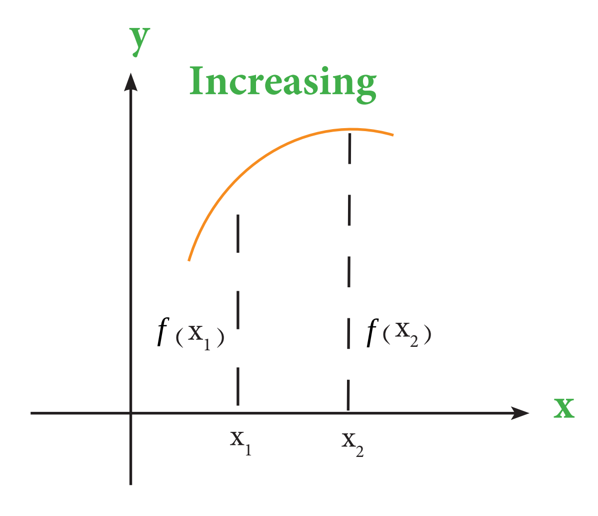
لتكن $f(x)$ دالة معرفة على فترة .عندئذ

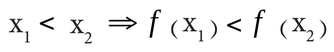
1- يقال ان الدالة $f(x)$ متزايدة (**Increasing**) على الفترة لاي عددين x_1 , x_2 في الفترة

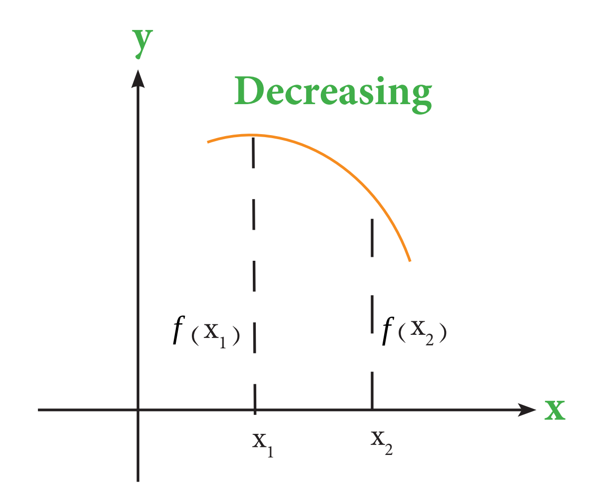
$$\forall \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2- يقال ان الدالة $f(x)$ متناقصة (**Decreasing**) على الفترة لاي عددين x_1, x_2 في الفترة

$$\forall \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$




$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

تعريف (3-3)

لتكن f دالة ، x_1 عنصر في مجالها فأن النقطة $(x_1, f(x_1))$ تسمى حرجة $\Leftrightarrow f'(x_1) = 0$ او أن الدالة f غير قابله للاشتقاق عند x_1 .

الا أننا سوف ندرس النقاط الحرجة التي تكون عندها الدالة قابلة للاشتقاق وقيمة المشتقة عندها تساوي صفراً .

مثال 29 جد النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^3 - 3x + 6$



اشتقاق $f'(x) = 3x^2 - 3$

جعل المشتقة = صفراً $f'(x) = 0$

حل المعادلة $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

ايجاد النقط $f(1) = 1^3 - 3(1) + 6 = 4 \Rightarrow (1,4)$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 6$$
$$= -1 + 3 + 6 = 8 \Rightarrow (-1,8)$$

النقاط الحرجة $(-1,8),(1,4)$

لايجاد النقاط الحرجة لدالة معلومة

1- نجد $f'(x)$

2- نجد قيم x التي تجعل $f'(x) = 0$ إن امكن

3- لكل قيمة للمتغير x حصلنا عليها من (2) نجد $y = f(x)$ وبذلك نحصل على النقاط الحرجة .

مثال 30 لكل من الدوال الاتية جد ان وجدت النقاط الحرجة ومناطق التزايد ومناطق التناقص

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$



نجد $f'(x)$ $f'(x) = 2x - 4$

نجعل $f'(x) = 0$

$\therefore 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

نجد احداثيها الصادي **y**

$f(2) = y = 2^2 - 4(2) + 3 \Rightarrow y = -1$

$\therefore$ النقطة $(2,-1)$ هي نقطة حرجة

ولايجاد مناطق التزايد أو التناقص نعين اشارة $f'(x)$ وذلك بالاستعانه بخط الاعداد الحقيقيه بالطريقة الاتية :

نرسم خط الاعداد ونعين عليه قيم (**x**) التي عندها نقط حرجة وعندها ينقسم خط الاعداد الى مجموعات.

ثم نختار عنصر من كل مجموعة ونعوضه في $f'(x)$ فنحصل على اشارة $f'(x)$ في تلك المجموعة التي اخترنا فيها العنصر . وفي هذا المثال ناخذ عدد اكبر من (**2**) ليكن **x = 3** ونلاحظ ان اشارة $f'(3)$ موجبة فتكون $f'(x) > 0$ لكل $x > 2$ ، $\therefore$ الدالة متزايدة في هذه المجموعة.

ونختار عددا اصغر من (**2**) ليكن **x=1** نلاحظ اشارة $f'(1)$ سالبة اي ان $f'(x) < 0$ لكل $x < 0$ ، $\therefore$ الدالة متناقصة في هذه المجموعة.

لاحظ الشكل:

اشارة $f'(x)$: $x < 2$ (------) | 2 | $x > 2$ (++++++)

1) الدالة متزايدة في $\{x : x \in R \ ; x > 2\}$

2) الدالة متناقصة في $\{x : x \in R \ ; x < 2\}$

2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نجعل $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

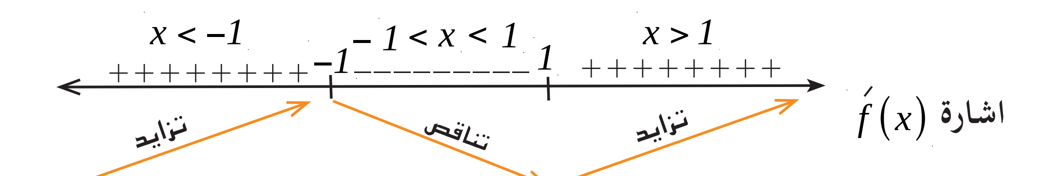
$f(1) = 1^3 - 3(1) + 2 = 0$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$

$= -1 + 3 + 2 = 4$

النقاط الحرجة $(-1,4),(1,0)$

نرسم خط الاعداد ونعين عليه $x=-1, x=1$



اشارة $\acute{f}(x)$

الدالة متزايدة في

$$1)\{x : x \in R , x > 1\}$$
$$2)\{x : x \in R , x < -1\}$$

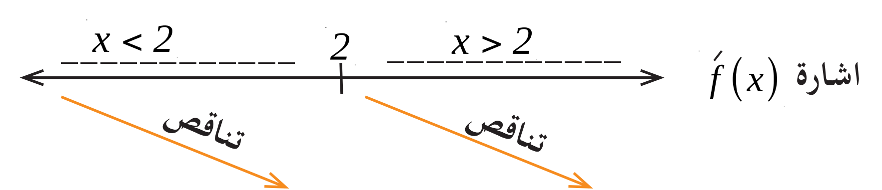
الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

3) $f(x) = (2-x)^3$



$$\acute{f}(x) = 3(2-x)^2(-1)$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow -3(2-x)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (2-x)^2 = 0 \Rightarrow 2-x = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$f(2) = (2-2)^3 = 0$$

$\therefore$ النقطه $(2,0)$ نقطة حرجة



اشارة $\acute{f}(x)$

نلاحظ الدالة متناقصة في

$$1)\{x : x \in R , x > 2\}$$
$$2)\{x : x \in R , x < 2\}$$

ايجاد النهايات العظمى أو الصغرى

1) نجد النقطة الحرجة ان وجدت كما مربنا سابقاً ، [اذا كانت الدالة لا تمتلك نقطة حرجة فليس لها نقاط نهايات عظمى محلية او نقاط نهايات صغرى محلية].

2) نعين مناطق تزايد الدالة ومناطق تناقصها ان وجدت .

3) اذا كانت الدالة متزايدة [اي اشارة المشتقة للدالة موجبة] قبل النقطة الحرجة ومتناقصة بعدها ، [اي اشارة المشتقة الاولى للداله سالبة بعد النقطة الحرجة] فالنقطة الحرجة عندئذ هي نقطة نهاية عظمى محلية .

4) اذا كانت الدالة متناقصة [اي اشارة المشتقة الاولى للدالة السالبة] قبل النقطة الحرجة ومتزايدة بعدها [اي اشارة المشتقة الاولى للدالة موجبة بعد النقطة الحرجة] فالنقطة الحرجة عندئذ هي نقطة نهاية صغرى محلية.

5) اذا لم يحدث تغير في اشارة $f'(x)$ مرورا بالنقطة الحرجة عندئذ الدالة لا تمتلك نقطة نهاية عظمى محلية او نقطة نهاية صغرى محلية . وتكون النقطة حرجة فقط .

مثال 31 اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ، جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت



$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3, x = -1$$

$$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7$$

$$= 27 - 27 - 27 + 7 = -20$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7$$

$$= -1 - 3 + 9 + 7 = 12$$

نقاط حرجة $(3,-20),(-1,12)$

اشارة $\acute{f}(x)$

$x < -1$	-1	$-1 < x < 3$	3	$x > 3$
$++++++++++$		$-----------$		$++++++++++$
تزايد		تناقص		تزايد

الدالة متزايدة في

$$1)\{x : x \in R, x > 3\}$$
$$2)\{x : x \in R, x < -1\}$$

ومتناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,3)$

$\therefore$ نقطة نهاية صغرى $(3,-20)$

$\therefore$ نقطة نهاية عظمى $(-1,12)$

مثال 32 لتكن $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت .



$$\acute{f}(x) = 4x^3 - 4x$$
$$\acute{f}(x) = 0$$
$$4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0$$
$$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$
$$x = 0, x = 1, x = -1$$
$$f(0) = 0^4 - 2(0)^2 + 1 = 1$$
$$f(1) = 1^4 - 2(1)^2 + 1 = 0$$
$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 1 = 0$$

النقطة الحرجة $(0,1)$

النقطة الحرجة $(1,0)$

النقطة الحرجة $(-1,0)$

اشارة $\acute{f}(x)$

$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$--------$		$+++++++$		$--------$		$+++++++$
تناقص		تزايد		تناقص		تزايد

الدالة متزايدة في $1)\{x : x \in R, x > 1\}$

وفي الفترة المفتوحة $2)(-1,0)$

الدالة متناقصة في $1)\{x : x \in R, x < -1\}$

وفي الفترة المفتوحة $2)(0,1)$

$\therefore$ النقطتان $(1,0)$، $(-1,0)$ نهاية صغرى محلية

$(0,1)$ نهاية عظمى محلية

مثال 33 لتكن $f(x) = x^3(-4+x)$ جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت.

الحل

$$f(x) = -4x^3 + x^4$$

$$f'(x) = -12x^2 + 4x^3$$

$$f'(x) = 4x^2(-3+x)$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$4x^2(-3+x) = 0$$

$$4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$-3 + x = 0 \Rightarrow x = 3$$

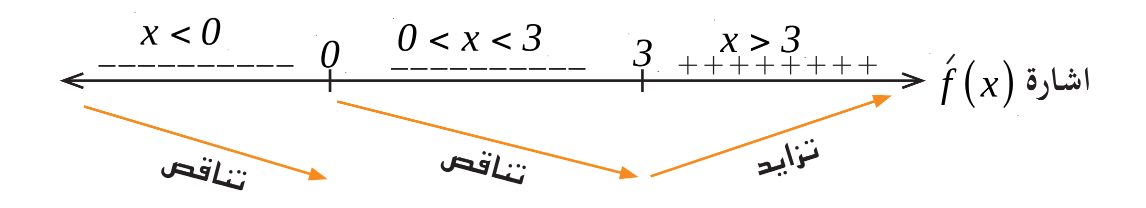
نعوض في المعادلة الاصلية

$$f(0) = 0^3(-4+0) = 0$$

$$f(3) = 3^3(-4+3) = -27$$

نقطة حرجة $(0,0)$

نقطة حرجة $(3,-27)$



الدالة متزايدة في $\{x : x \in R, x > 3\}$

الدالة متناقصة في $1)\{x : x \in R, x < 0\}$

وفي الفترة المفتوحة $2)(0,3)$

$\therefore$ النقطة $(3,-27)$ نهاي صغرى محلية

النقطة $(0,0)$ نقطة حرجة وليست نهاية

الدالة لاتمتلك نهاية عظمى

مثال 34

اذا كانت $f(x) = x^3 + ax + 5$ لها نقطة نهاية محلية عند $x = 1$ جد قيمة (**a**) وبين نوع النهاية .



$$\acute{f}(x) = 3x^2 + a$$

$$\acute{f}(\mathbf{1}) = 0 \Rightarrow 3(1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

لمعرفة نوع النهاية

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\mathbf{1}$$

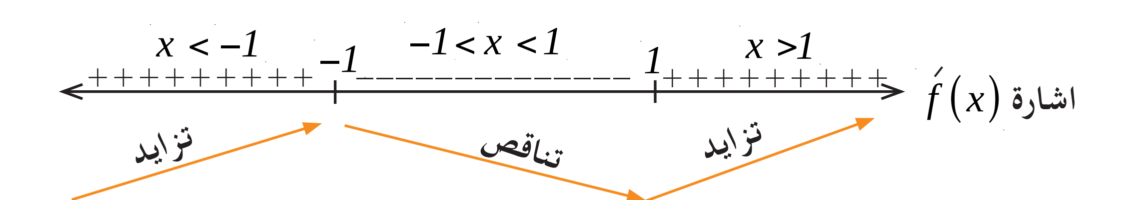
$$f(1) = 1^3 - 3(1) + 5 = 3$$

$\therefore$ النقطة الحرجة $(1,3)$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 5$$

$$= -1 + 3 + 5 = 7$$

النقطة الحرجة $(-1,7)$



اشارة $\acute{f}(x)$

الدالة متزايدة في

$$1)\{x : x \in R , x > 1\}$$

$$2)\{x : x \in R , x < -1\}$$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

$\therefore$ النقطة $(-1,7)$ نهاية عظمى محلية

النقطة $(1,3)$ نهاية صغرى محلية

مثال 35

اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx$ وكانت $f(x)$ تمتلك نهاية محلية عند النقطة $(1,-2)$ فما قيمة كل من $a,b \in R$ وما نوع هذه النهاية ؟

الحل

$$f(x) = ax^3 + bx$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f'(x) = 0$$

نعوضها في $f'(x)$ $x = 1$

$$3a(1)^2 + b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad \dots\dots\dots\dots ①$$

النقطة $(1,-2)$ تحقق معادلة الدالة $f(x)$

$$f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow -2 = a(1)^3 + b(1)$$

$$\Rightarrow -2 = a + b \dots\dots\dots\dots ②$$

$$3a + b = 0$$

$$a + b = -2$$

بالطرح

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

نعوض باحدى المعادلتين ولتكن ①

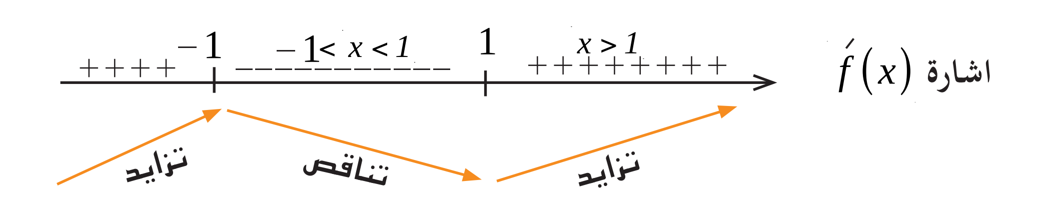
$$3(1) + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

تصبح الدالة $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \mp 1$$

اشارة $f'(x)$



الدالة متزايدة في $\{x : x \in R, x > 1\}$ وفي $\{x : x \in R , x < -1\}$

الدالة متناقصة في $\{x : x \in R, -1 < x < 1\}$

$\therefore$ النقطة $(1 , -2)$ نهاية صغرى محلية

تمارين (3-4)

1- جد نقاط النهايات العظمى أو الصغرى المحلية لكل من الدوال الاتية :

$a)\ f(x) = x^4 - 1$

$b)\ f(x) = x^3$

$c)\ f(x) = (x-1)^3$

$d)\ f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$e)\ f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

$f)\ f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$

$g)\ f(x) = 3x^4 + 4x^3$

2- اذا علمت ان النقطة $(2,1)$ هي نقطة النهاية الصغرى المحلية للدالة $f(x) = a + (x-b)^2$.
فجد قيمة كل من $a,b \in R$.

3- اذا كانت النقطة $(1,4)$ نقطة حرجة للدالة $f(x) = 3 + ax + bx^2$ فما قيمة $a,b \in R$ وما نوع النقطة الحرجة ؟

[3-8] التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

نقطة الانقلاب :ـ هي نقطة تنتمي لمنحني الدالة ويتغير عندها المنحني من حالة تحدب الى حالة تقعر أو من حالة تقعر الى حالة تحدب.

لمعرفة مناطق التحدب والتقعر

تعريف (3-4)

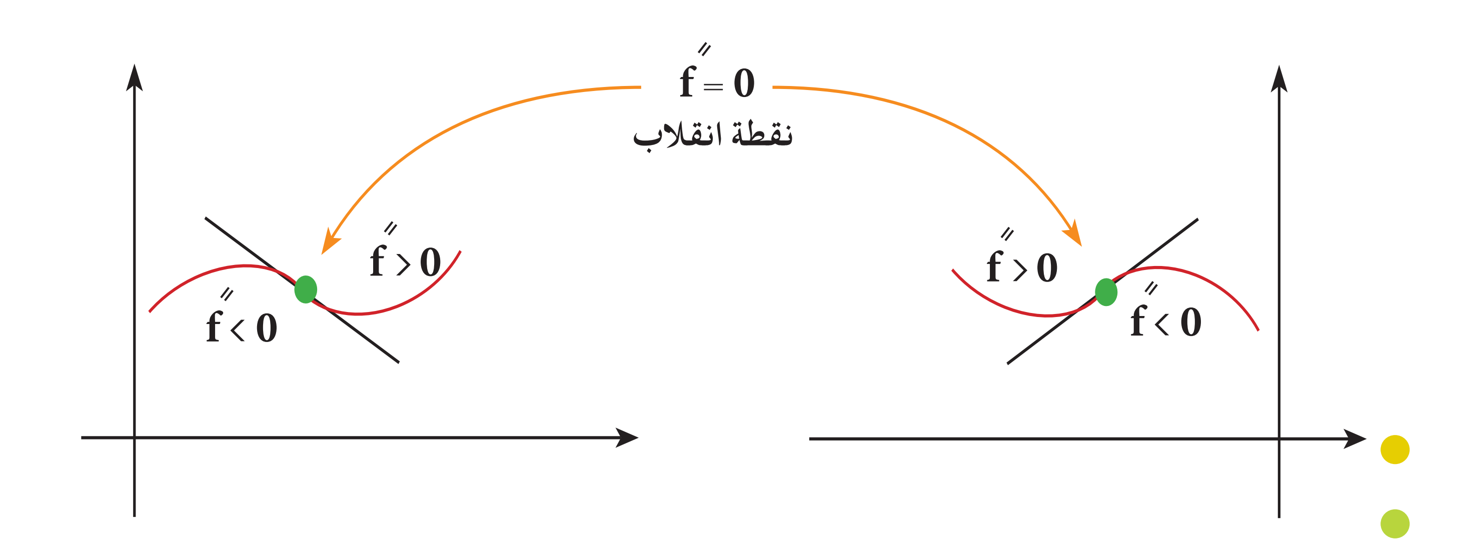
اذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثانية فان:

1) يكون منحنى الدالة $f(x)$ محدباً في فترة مفتوحة اذا كانت $f''(x) < 0$

2) يكون منحنى الدالة $f(x)$ مقعراً في فترة مفتوحة اذا كانت $f''(x) > 0$

3) كل نقطة انقلاب تكون المشتقة الثانية عندها تساوي صفر أو غير معرفة.

الا اننا سوف ندرس نقطة الانقلاب التي تكون عندها المشتقة الثانية صفر .



ولايجاد مناطق التقعر أو التحدب ونقطة الانقلاب نتبع الخطوات

1) نجد $f''(x)$

2) نجعل $f''(x) = 0$ ونجد قيم x التي تنتمي لمجال الدالة .

3) نحدد اشارة $f''(x)$ باستخدام خط الاعداد الحقيقية .

4) تكون النقط التي تنتمي لمنحني الدالة والفاصلة بين مناطق التقعر والتحدب هي نقاط الانقلاب .

مثال 36

جد نقاط الانقلاب للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ان وجدت.

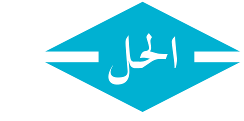
الحل

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$
$$f'(x) = 2x - 4$$
$$f''(x) = 2 \neq 0$$
$$f''(x) = 2$$

لا توجد نقاط انقلاب لان المنحني مقعر في **R**

مثال 37

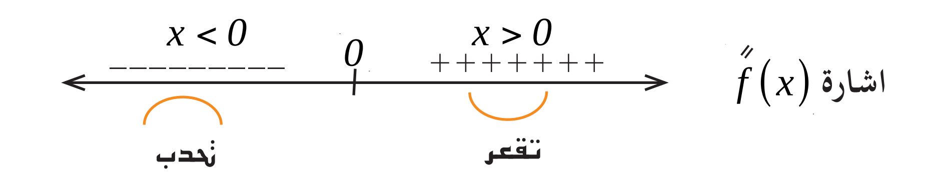
لتكن $f(x) = x^3 - 3x + 2$ جد نقطة الانقلاب.



$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f''(x) = 6x$$

نجعل $f''(x) = 0$

$$\therefore 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$f(0) = 0^3 - 3(0) + 2 = 2$$
$$(0,2)$$



منطقة التحدب $\{x : x \in R, x < 0\}$

منطقة التقعر $\{x : x \in R, x > 0\}$

$\therefore (0,2)$ نقطة انقلاب

؟ تمارين (5-3)

لكل من الدوال الاتية عين ان وجدت نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب :

$1)\ f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$2)\ f(x) = 3x - x^3$

$3)\ f(x) = x^3 - 3x^2$

$4)\ f(x) = x^5$

$5)\ f(x) = (x-2)^3 + 3$

$6)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

$7)\ f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

[3-9] رسم الدوال

لكي نرسم اي دالة نتبع الخطوات التالية :

1) نجد نقاط التقاطع مع المحورين ان امكن .
2) نعين مناطق التزايد والتناقص ومنها نحدد نوع النقط الحرجة.
3) نعين مناطق التقعر والتحدب ومنها نقط الانقلاب .
4) نجد نقط اضافية اذا احتجنا اليها.

مثال 38 ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$



$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

1) التقاطع مع المحورين

نعطي $x = 0$ (تقاطع مع محور الصادات).

$$f(0) = 0^2 + 4(0) + 3 = 3$$

نقطة التقاطع $(0,3)$ مع محور الصادات

نعطي $f(x) = 0$ (تقاطع مع محور السينات).

$$\therefore x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$$x = -3, x = -1$$

نقاط التقاطع $(-1,0)(-3,0)$ مع محور السينات .

2) النهايات العظمى والصغرى

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$(-2,-1)$ نقطة حرجة

$x < -2$ $\quad -2 \quad$ $x > -2$

اشارة $f'(x)$: ‎- - - - - - - - - - - - (عند $x<-2$) ، ‎+ + + + + + + + + (عند $x>-2$)

تناقص ← ‎ -2 ‎ → تزايد

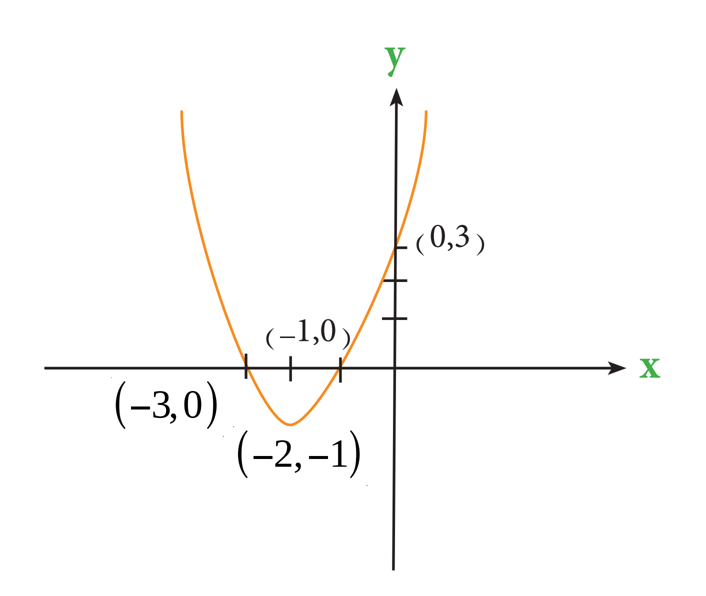
منطقة التزايد $\{x : x \in R ; x > -2\}$

منطقة التناقص $\{x : x \in R ; x < -2\}$

$\therefore$ النقطه $(-2,-1)$ نهاية صغرى محلية

نجد $f''(x)$ $\qquad f''(x) = 2$

الدالة مقعرة في مجالها و لا توجد نقاط انقلاب



x	y
−3	0
−2	−1
−1	0
0	3

مثال 39 ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x$

الحل

1) نجد نقط تقاطع المحورين

$f(x) = x^3 - 3x$

نعطي $x = 0$

$f(0) = 0^3 - 3(0)$

$\therefore$ نقطة التقاطع $(0,0)$

نعطي $f(x) = 0$

$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ او $x = \mp\sqrt{3}$

$\therefore$ نقاط التقاطع $(0,0)(\sqrt{3},0)(-\sqrt{3},0)$

2) نجد النهايات العظمى والصغرى

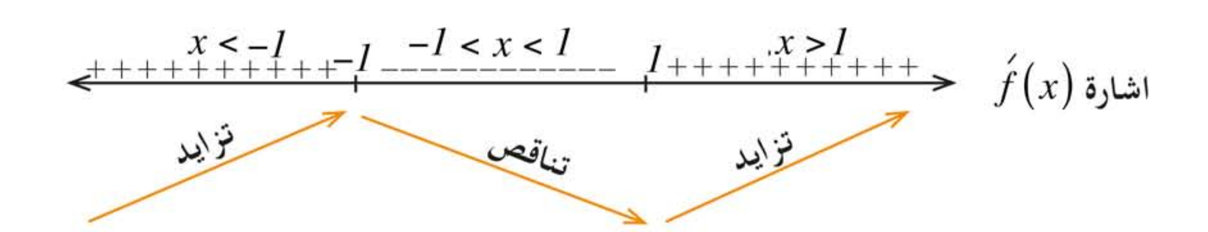
$f'(x) = 3x^2 - 3$

نجعل $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

$f(1) = 1^3 - 3(1) \Rightarrow f(1) = -2 \Rightarrow (1,-2)$ نقطة حرجة

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) \Rightarrow f(-1) = 2 \Rightarrow (-1,2)$ نقطة حرجة



∴ الدالة متزايدة في

$1)\{x : x \in R, x > 1\}$

$2)\{x : x \in R, x < -1\}$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

∴ النقطة $(1,-2)$ نهاية صغرى محلية

النقطة $(-1,2)$ نهاية عظمى محلية

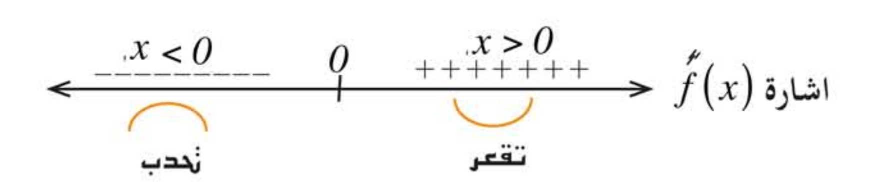
3) نجد نقاط الانقلاب

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0$

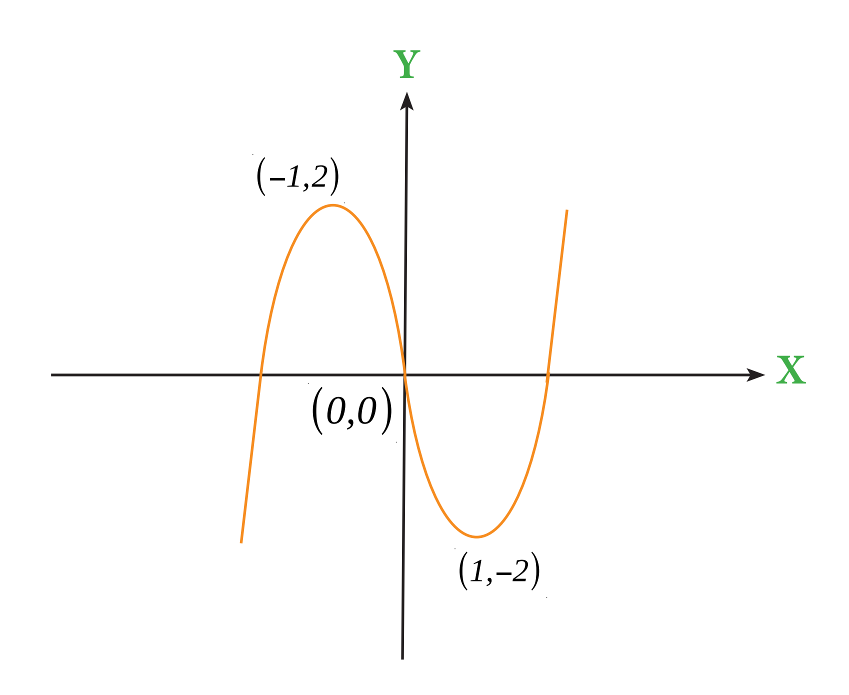
$6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$



مناطق التقعر $\{x : x \in R, x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x \in R, x < 0\}$



مثال40 ارسم منحني الدالة $f(x)=(x+1)^3-1$



$$f(x)=(x+1)^3-1$$

1) نقاط التقاطع

نعطي $x=0$

$$f(0)=(0+1)^3-1=0$$

نقطة التقاطع $(0,0)$

نعطي $f(x)=0$

$$(x+1)^3-1=0 \Rightarrow (x+1)^3=1 \Rightarrow x=0$$

2) نجد نقاط النهايات

$$f'(x)=3(x+1)^2(1)$$

$$3(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f(-1)=(-1+1)^3-1=-1$$

$\therefore (-1,-1)$ نقطة حرجة

اشارة $f'(x)$: $x<-1$ ++++++++ | -1 | ++++++++ $x>-1$

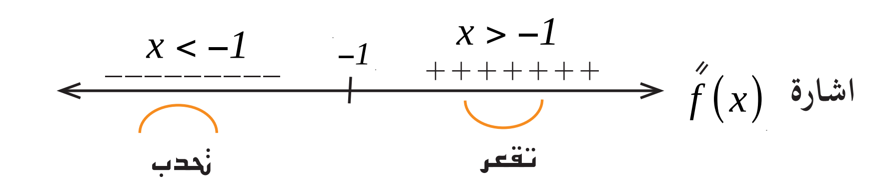
تزايد ، تزايد

الدالة متزايدة في مجالها

3) نجد نقاط الانقلاب

$$f''(x) = 6(x+1)$$
$$f''(x) = 0$$
$$6(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

∴ النقطة $(-1,-1)$

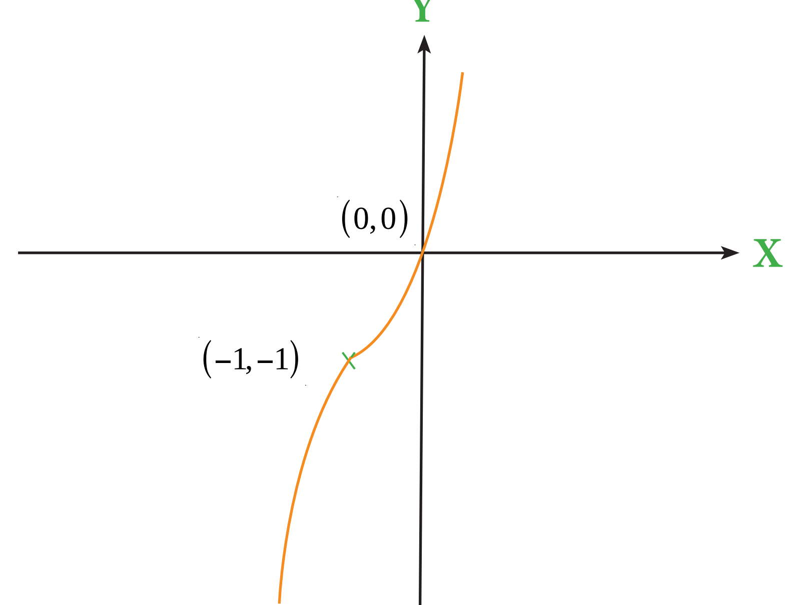


منطقة التقعر $\{x : x \in R, x > -1\}$

منطقة التحدب $\{x : x \in R, x < -1\}$

نقطة انقلاب $(-1,-1)$

x	y
0	0
−1	−1
−2	−2
1	7



تمارين (3-6)

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدوال التالية :

1) $f(x) = 4 - 6x - x^2$

2) $f(x) = 3x - x^3$

3) $f(x) = (x - 1)^3$

4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ لا ضرورة لايجاد التقاطع مع محور السينات

[3-10] تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

ان للرياضيات دورا مهما في الحياة العملية فكثيرا ما تصادفنا مشكلات نحتاج فيها اكبر قيمة اواصغر قيمة لدالة ما ، مثل معرفة اكبر مساحة او اقل زمن او اقل تكاليف تحت شروط معينة لحل هذه المسائل.

ملاحظات حول حل هذه المسائل

1- في الاسئلة الهندسية ، نرسم شكلا توضيحيا ثم نعين الرموز الجبرية لتلك المتغيرات .

2- نكتب القانون المتعلق بالسؤال واذا كانت المتغيرات اكثر من واحد عندئذ نلجأ الى ايجاد علاقة بين هذه المتغيرات .

3- نجد النقاط الحرجة بايجاد $f'(x)$ ثم نجعل $f'(x)=0$ ونفحص المشتقة كل ما امكن ذلك.

مثال 41 جد عددين مجموعهما يساوي **20** اذا كان :

a) حاصل ضربهما اكبر مايمكن.

b) مجموع مربعيهما اصغر مايمكن .



a) نفرض العدد الاول = **x**

العدد الثاني = **y**

حاصل ضرب $m = xy$

$$m = x\,y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

نعوض ② في ①

$$\therefore m = x(20 - x) \Rightarrow m = 20x - x^2$$

$$m' = 20 - 2x$$

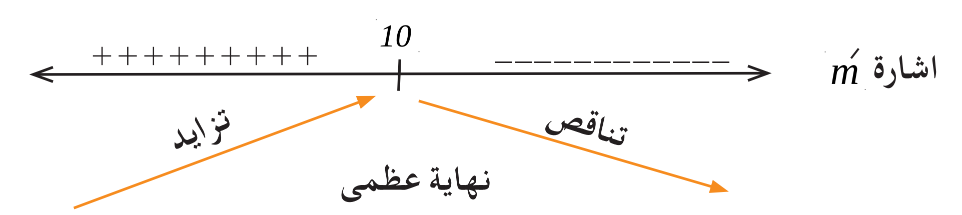
نجعل

$$m' = 0$$

$$20 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$$

$$y = 20 - 10 = 10$$

وللتأكد من صحة الحل ندرس (وهو للاطلاع لجميع الامثلة).



b)

$$h = x^2 + y^2$$

$$h = x^2 + (20 - x)^2$$

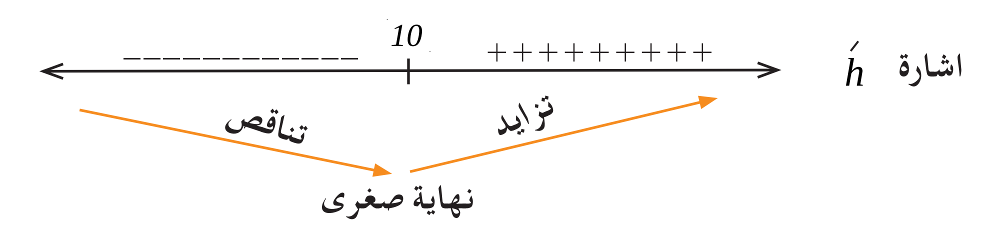
$$h = x^2 + 400 - 40x + x^2$$

$$\Rightarrow h = 2x^2 - 40x + 400$$

$$\acute{h} = 4x - 40 \Rightarrow 4x - 40 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{4} = 10$$ العدد الاول

$$y = 20 - 10 = 10$$ العدد الثاني





جد ابعاد اكبر مستطيل محيطة **40** متر .

الحل

نفرض ان طول المستطيل = **x**

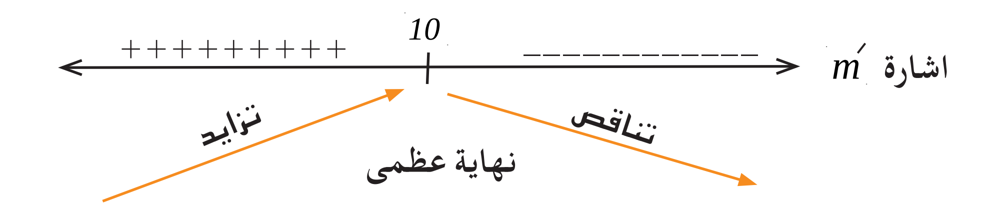
عرض المستطيل = **y**

المساحة ① .... $m = x\,y$

محيط المستطيل = (الطول + العرض) **2**

$$2(x+y) = 40 \Rightarrow x+y = 20$$
$$\Rightarrow y = 20 - x$$
$$\therefore m = x(20-x)$$ نعوض ① في ②
$$m = 20x - x^2$$
$$m' = 20 - 2x \Rightarrow 20 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow x = 10$$ متر

$$y = 20 - 10 = 10$$ متر



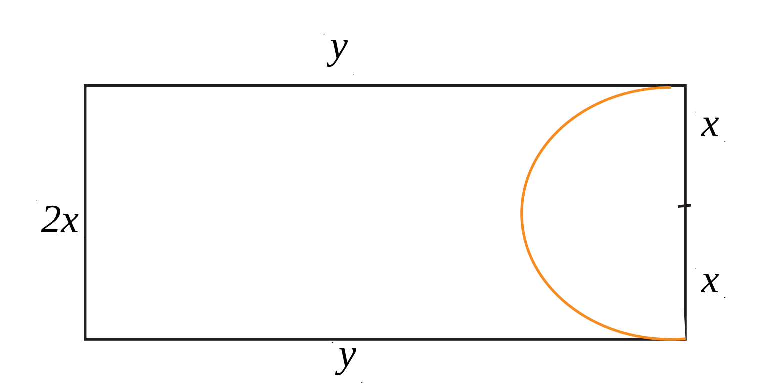


من مستطيل محيطة $(120)cm$ قطعت منطقة على شكل نصف دائرة ينطبق قطرها على احد الضلعين الصغيرين للمستطيل مابعاد ذلك المستطيل لكي تكون المساحة المتبقية بعد القطع اكبر مايمكن؟

الحل

نفرض طول الضلع الصغير للمستطيل $= 2x$

طول الضلع الاخر $= y$



مساحة المستطيل = $2xy$

المساحة المقطوعة = مساحة نصف دائرة نصف قطرها (x)

$\therefore$ المساحة المقطوعة = $\frac{1}{2}x^2\Pi$

$$\frac{1}{2}x^2\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{11}{7}x^2$$

$$m = 2xy - \frac{11}{7}x^2 \quad \dots\dots\dots\dots \text{①}$$

$\because$ محيط المستطيل

$$\therefore 2(2x+y) = 120$$

$$2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x \quad \dots\dots\dots\dots \text{②}$$

نعوض ② في ①

$$m = 2x(60-2x) - \frac{11}{7}x^2$$

$$m = 120x - 4x^2 - \frac{11}{7}x^2$$

$$m' = 120 - 8x - \frac{22}{7}x$$

بضرب طرفي المعادلة في (7)

$$\therefore 120 - 8x - \frac{22}{7}x = 0$$

$$840 - 56x - 22x = 0$$

$$78x = 840 \Rightarrow x = \frac{840}{78} = \frac{140}{13}\,cm$$

$\therefore$ طول الضلع الصغير $= 2x$

$$= \frac{280}{13}$$

طول الضلع الكبير $= y = 60 - 2x$

$$60 - \frac{280}{13} = \frac{500}{13}$$

مثال 44 جد العدد الذي زيادة ثلاثة امثال مربعه على مكعبه اكبر ما يمكن .



الحل

نفرض العدد = x

ثلاثة امثال مربعة = $3x^2$

مكعب العدد = x^3

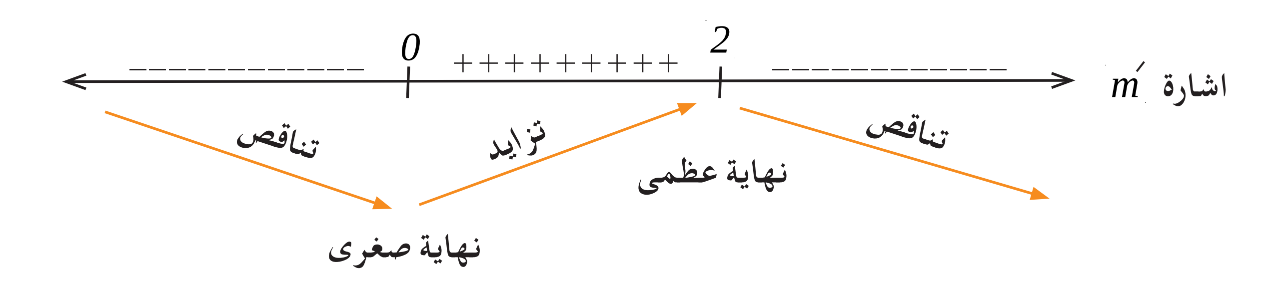
$$m = 3x^2 - x^3$$

$$\acute{m} = 6x - 3x^2 \Rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \div 3$$

$$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$$

$x = 0$ يهمل

$x = 2$ العدد



مثال 45 يراد صنع حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه $(864)m^3$ اوجد اقل مساحة من الالواح يمكن ان تستخدم في صنعه .



الحل

نفرض طول ضلع الحوض = x

ارتفاع الحوض = y

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحد (لانه بدون غطاء)

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية = h

$$h = 4xy + x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

حجم المتوازي = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = x^2 y$$

$$\therefore x^2 y = 864$$

$$y = \frac{864}{x^2} \quad .... \quad ②$$

نعوض ② في ①

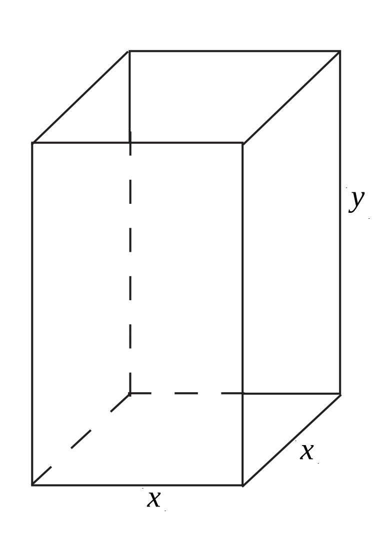
$$\therefore h = 4x\frac{864}{x^2} + x^2$$

$$h = 4(864)x^{-1} + x^2$$

$$h' = -4(864)x^{-2} + 2x$$

نجعل

$$h' = 0$$



$$\frac{-4(864)}{x^2} + 2x = 0$$

$$\frac{-3456}{x^2} + 2x = 0 \Rightarrow \frac{-1728}{x^2} + x = 0$$


نضرب طرفي المعادلة في x^2

$$-1728 + x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 1728$$

$$x = 12m$$

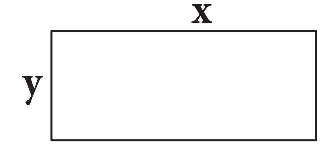
$$y = \frac{864}{x^2} = \frac{864}{(12)^2} = \frac{864}{144} = 6m$$

$$h = 4xy + x^2$$

$$h = 4(12)x6 + (12)^2$$

$$h = 432\,m^2$$

مثال 46 جد اقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ($100\ cm^2$)



الحل

نفرض بعدي المستطيل : **x , y cm**


نفرض المحيط = **P**

الدالة

$$P = 2(x+y).......(1)$$

من المساحة :

$$xy = 100$$

علاقة

$$\Rightarrow y = \frac{100}{x}$$

نعوض في (1)

$$\therefore P = 2(\frac{100}{x} + x)$$

$$= 2(100x^{-1} + x)$$

$$\frac{dp}{dx} = 2(\frac{-100}{x^2} + 1) = 2(\frac{x^2 - 100}{x^2})$$

نجعل $\frac{dp}{dx} = 0$ (المشتقة عند النهايات = **0**)

$$\Rightarrow 2(\frac{x^2 - 100}{x^2}) = 0$$

$$\Rightarrow x = 10cm$$

$\therefore$ المحيط في نهايته الصغرى عندما $y = 10$

$$\therefore x = 10cm$$

المحيط **P** = $2(10 + 10)$

$$= 40cm$$

مثال 47 اذا كانت دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة معينة هي

$$c(x) = \frac{1}{9}x^2 + 6x + 100$$

جد حجم الانتاج الذي عنده يكون معدل الكلفة اقل مايمكن.



نجد معدل الكلفة

$$AC = \frac{c(x)}{x} = \frac{1}{9}x + 6 + \frac{100}{x}$$

$$\frac{d(AC)}{dx} = \frac{1}{9} - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 900 \Rightarrow x = 30$$

عندما $x = 30$ فان القيمة الصغرى لمعدل الكلفة
تحصل عندما يكون حجم الانتاج **30** وحدة

تمارين (7-3)

1- جد عددين مجموعهما 15 وحاصل ضرب احدهما في مربع الآخر اكبر مايمكن .

2- ما العدد الذي زيادته على مربعه اكبر مايمكن ؟

3- جد عددين موجبين مجموعهما (15) وحاصل ضرب مربع احدهما في مكعب الاخر اكبر مايمكن.

4- جد عددين مجموعهما 10 وحاصل ضرب مربع احدهما في مربع الاخر اكبر مايمكن.

5- قطعة ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من احدى جهاتها جد اكبر مساحة من الارض يمكن تسييجها بسياج طوله (100) متر .

6- حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة وحجمه $(108)m^3$ جد ابعاده بحيث تكون مساحة الالواح المستخدمة في صنعة اقل مايمكن.

7- اطلقت رصاصة الى الاعلى وكان ارتفاعها (m) متر في نهاية t من الثواني بحيث ان $m = 224\,t - 16\,t^2$ احسب اقصى ارتفاع تصل الية الرصاصة .

8- نافذة علي شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة بحيث ينطبق قطرها على احد ابعاد المستطيل فاذا كان محيط المستطيل m (8) جد ابعاد المستطيل لكي تكون مساحة النافذة اكبر ما يمكن.

9- في ورشة للنجارة يراد صنع صندوق من الخشب على شكل متوازي السطوح قاعدته مربعة الشكل بدون غطاء . جد ابعاد الصندوق لكي يكون حجمه اكبر مايمكن علما ان مجموع محيط قاعدته وارتفاعه $(90)m$.

10- اذا كانت دالة الكلفة لانتاج سلعة ما هي : $c(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 40$ جد حجم الانتاج الذي يكون عنده معدل الكلفة اقل مايمكن .

الفصل الرابع

التكامل

Integration

[4-1] عكس التفاضل

توجد في الرياضيات الكثير من العمليات العكسية ، الطرح عكس الجمع ، القسمة عكس الضرب ، والجذر عكس الرفع حيث ان كل منها تزيل تأثير الاخرى .

وفي هذا البند سندرس عملية عكس الاشتقاق وتدعى عملية التكامل ولتوضيح ذلك :

ليكن

$$f_1(x) = x^2 \Rightarrow f_1'(x) = 2x$$

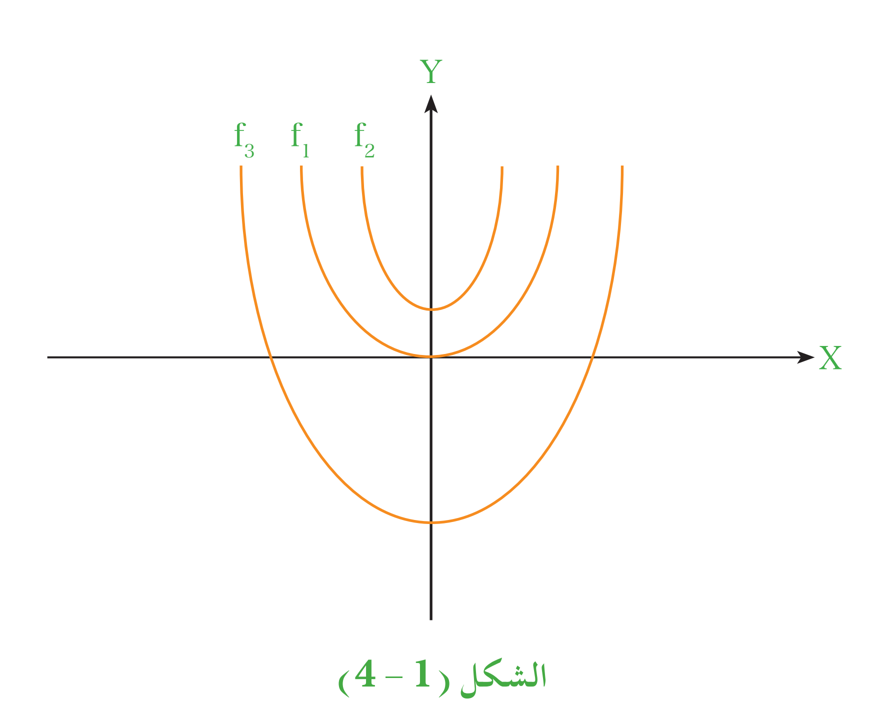
$$f_2(x) = x^2 + 2 \Rightarrow f_2'(x) = 2x$$

$$f_3(x) = x^2 - 7 \Rightarrow f_3'(x) = 2x$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_n(x) = x^2 + c \Rightarrow f_n'(x) = 2x$$

حيث $C \in R$ عدد ثابت



الشكل (1 – 4)

نلاحظ ان مشتقة كل دالة من تلك الدوال تساوي $2x$. والتي تمثل ميل المنحني عند كل نقطة من نقطه .
ان عملية ارجاع هذه المشتقة الى الدالة التي تم اشتقاقها تسمى عملية التكامل .

يقال للدالة $F(x)$ انها عكس مشتقة للدالة $f(x)$ في فترة معينة H

اذا كانت : $\acute{F}(x) = f(x)$ على الفترة المعطاة

واذا كانت $c \in R$ ، $G(x) = F(x) + c$ حيث c عدد ثابت

فان $\acute{G}(x) = \acute{F}(x) = f(x) \quad \forall x \in H$

وبذلك يكون $G(x)$ هي ايضاً عكس مشتقة $f(x)$ وبذلك نستنتج ان هناك عدد غير منته من الدوال كل منها عكس مشتقة $f(x)$. بعد هذا الموجز نقصد بعكس الاشتقاق عملية ايجاد الصيغة العامة للدالة التي اعطيت مشتقتها . ويرمز لهذه العملية بالرمز ($\int$) ونعبر عن عملية عكس الاشتقاق للـــدالة $f(x)$ باستعمال هذا الرمز بالصورة:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

وفي هذه الحالة يقال ان الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل بالنسبة الى x اي ان $\int f(x)\,dx$ موجودة

فاذا فرضنا ان $f(x) = x^n$ فان $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ حيث $n \neq -1$

فيكون: $$f(x) = x^n = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'$$

بأخذ تكامل الطرفين ينتج:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$$ ، c ثابت حقيقي

[4-2] قواعد التكامل غير المحدد

اذا كان كل من $\int f(x)\,dx$ ، $\int g(x)\,dx$ موجوداً على $[a,b]$ والثابت $c \in R$ فإن:

1) $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

2) $\int [f(x) \mp g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx$

3) $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

مثال 1 جد كلا من التكاملات الاتية:



1) $\int (3x^2 + 5)\,dx = 3\int (x^2)\,dx + 5\int dx$

$= 3 \cdot \dfrac{x^3}{3} + 5 \cdot \dfrac{x^1}{1} + c$

$= x^3 + 5x + c$

2) $\int (x^2+1)(2x-3)\,dx = \int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 3)\,dx$

$= 2\int x^3\,dx - 3\int x^2\,dx + 2\int x\,dx - 3\int dx$

$= 2 \cdot \dfrac{x^4}{4} - 3 \cdot \dfrac{x^3}{3} + 2 \cdot \dfrac{x^2}{2} - 3\,\dfrac{x^1}{1} + c$

$= \dfrac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3x + c$

يمكن ان نكامل مباشرةً كما في الامثلة اللاحقة:

3) $\int \left(\sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{-2}{3}} - 1\right)dx$

$= \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\,\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - x + c$

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - 9\sqrt[3]{x} - x + c$

$$4)\quad \int \frac{x^4 - 8x}{x - 2}\,dx = \int \frac{x(x^3 - 8)}{(x - 2)}\,dx$$

تحليل عامل مشترك

$$= \int \frac{x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)}\,dx$$

تحليل فرق بين مكعبين

$$= \int (x^3 + 2x^2 + 4x)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + c$$

$$5)\quad \int (x^3 + 7)^5\, x^2\, dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 7)^5\, (3x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3 + 7)^6}{6} + c$$

$$= \frac{1}{18}(x^3 + 7)^6 + c$$

$$6)\quad \int \frac{(x - 2)}{(x^2 - 4x + 5)^2}\,dx = \int (x^2 - 4x + 5)^{-2}\,(x - 2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (x^2 - 4x + 5)^{-2}\,(2x - 4)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 4x + 5)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{2(x^2 - 4x + 5)} + c$$

7) $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}}\, dx = \int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}\ x^3\, dx$

$= \frac{-1}{4} \int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}\ (-4x^3)\, dx$

بالضرب × $\frac{-4}{-4}$ للحصول على مشتقة داخل القوس.

$= \frac{-1}{4} \cdot \frac{(5-x^4)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$

$= \frac{-5}{16} \cdot \sqrt[5]{(5-x^4)^4} + c$

8) $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\, dx = \int \sqrt[3]{3-5x^2}\ x\, dx$ استخراج x^3 عامل مشترك

$\sqrt[3]{x^3} = x$

$= \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\ x\, dx$

$= \frac{-1}{4} \int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}\ (-4x^3)\, dx$

$= \frac{-1}{10} \cdot \frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{-3}{40} \cdot \sqrt[3]{(3-5x^2)^4} + c$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2 - 14x + 49}} = \int (x^2 - 14x + 49)^{\frac{-1}{5}}\ dx$

جعل داخل القوس مربع حدانية

$= \int [(x-7)^2]^{\frac{-1}{5}}\ dx$

$= \int (x-7)^{\frac{-2}{5}}\ dx$

$= \frac{(x-7)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c$

$= \frac{5}{3}\ \sqrt[5]{(x-7)^3} + c$

10) $\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx$ تحليل فرق مربعين

$= \int \frac{[(3x^2-4)-4][(3x^2-4)+4]}{x^2}\,dx$ تبسيط

$= \int \frac{(3x^2-8)\,(3x^2)}{x^2}\,dx$

$= \int (3x^2-8)(3)\,dx$

$= \int (9x^2-24)\,dx$

$= \frac{9x^3}{3} - 24x + c$

$= 3x^3 - 24x + c$

11) $\int \sqrt{z^2+3z+2}\,dx$

$= \sqrt{z^2+3z+2} \int dx$

$= \sqrt{z^2+3z+2}\,.(x) + c$

حيث $\sqrt{z^2+3z+2}$ يعتبر ثابت بالنسبة للمتغير x

؟ تمارين (4-1)

جد تكاملات كلا مما يأتي :

1) $\int (6x^2 - 4x + 3)\, dx$

2) $\int (3x - 1)(x + 5)\, dx$

3) $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 1)^2\, dx$

4) $\int \frac{x^3 + 27}{x + 3}\, dx$

5) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{5x^5}\, dx$

6) $\int \frac{x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1}}\, dx$

7) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2 + 16x + 64}}$

9) $\int \sqrt[7]{2x^{9} - 3x^{7}}\ dx$

10) $\int (3x^{2} + \frac{1}{\sqrt{x}})\ dx$

11) $\int \frac{y\,dx}{(19 - 2y^{2})^{\frac{1}{3}}}$

12) $\int \frac{x^{4} - 16}{x + 2}\ dx$

13) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})\ dx$

14) $\int \sqrt[5]{(1 - 3x)^{2}}\ dx$

15) $\int x^{2}\sqrt{x^{3} + 4}\ dx$

16) $\int x(\sqrt{x^{3}} + 4)\ dx$

[4-3] بعض تطبيقات التكامل غير المحدد

تعلمنا ان :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

حيث $(F(x)+c)' = f(x)$ ، c ثابت حقيقي ولهذا الثابت اهمية كبيرة في تطبيقات عملية واليك بعض هذه التطبيقات :

[4-3-1] التطبيق الهندسي للتكامل

مثال 1

اذا كان ميل المنحني عند كل نقطة (x , y) من نقاطه هو $(3x^2 - 2x + 1)$ جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة $(2 , 3)$.



لقد ذكرنا في الفصل الثالث ان مشتقة منحني تمثل ميل المنحني في النقطة (x , y) .

$$y = \int f'(x)\, dx$$

$$y = \int (3x^2 - 2x + 1)\, dx$$

$$y = x^3 - x^2 + x + c$$

المنحني يمر بالنقطة $(2 , 3)$ ، فهي تحقق المعادلة

$$3 = 8 - 4 + 2 + c$$

$$c = -3$$

$\therefore$ معادلة المنحني

$$\therefore\ y = x^3 - x^2 + x - 3$$

مثال 2

منحني ميله عند اية نقطة (x , y) يساوي $x\sqrt{x^2+9}$. جد معادلته اذا كان يمر بالنقطة $(0 , 7)$.



$$y = \int x\sqrt{x^2+9}\, dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{\frac{1}{2}}(2x)\, dx$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3} + c$$

$\because$ المنحني يمر بالنقطة $(0 , 7)$ فهي تحقق المعادلة $\quad 7 = \frac{1}{3}\sqrt{(0+9)^3} + c \Rightarrow c = -2$

$\therefore$ معادلة المنحني $\quad y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3} - 2$

مثال 3

جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x , y) من نقاطه هو $2x - 4$ وكان للمنحنى نهاية صغرى قيمتها (-3) .



بما ان للمنحني نهاية صغرى: $\quad \acute{f}(x) = 0$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad y = -3$$

$\therefore$ $(2 , -3)$ نهاية صغرى للمنحني فهي تقع على المنحني

$$y = \int (2x-4)\, dx \Rightarrow y = x^2 - 4x + c$$

بتعويض $(2 , -3)$

$$-3 = 4 - 8 + c$$

$$\therefore c = 1$$

$\therefore$ معادلة المنحني هي : $\quad y = x^2 - 4x + 1$

مثال 4

جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x , y) من نقطه هو $x^2 - x - 2$ وكان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات .



بما ان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات $\Leftarrow y = 0$ ، $f'(x) = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2 , x = -1$$

$\therefore (-1 , 0)$ نهاية عظمى

اشارة $f'(x)$: $+++$ عند -1 $----$ عند 2 $+++$ (عظمى ، صغرى)

$$y = \int (x^2 - x - 2)\, dx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$$

بالتعويض $(-1 , 0)$

$$0 = \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + c$$

$$c = \frac{-7}{6}$$

$\therefore$ معادلة المنحني

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{7}{6}$$

مثال 5

جد الدالة التي تحقق : $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 2$ ، $\frac{dy}{dx} = 5$ عند النقطة $(1 , 2)$.

الحل

$$y'' = 12x^2 - 2 \Rightarrow y' = \int (12x^2 - 2)\, dx$$

$$y' = 4x^3 - 2x + c_1 \qquad \because y' = 5 \;,\; x = 1$$

$$\therefore\; 5 = 4 - 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 2x + 3$$

$$y = \int (4x^3 - 2x + 3)\, dx$$

$$y = x^4 - x^2 + 3x + c_2 \qquad \because x = 1 \;,\; y = 2$$

$$\therefore 2 = 1 - 1 + 3 + c_2 \Rightarrow c_2 = -1$$

$\therefore$ معادلة المنحني هي :

$$y = x^4 - x^2 + 3x - 1$$

مثال 6

جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية $(6x)$ والذي يمر بالنقطتين $(1,6)$ ، $(-1,6)$.



$$y'' = 6x \Rightarrow y' = \int 6x\,dx \Rightarrow y' = 3x^2 + c_1$$

$$y = \int (3x^2 + c_1)\,dx \Rightarrow y = x^3 + c_1x + c_2$$

نعوض النقطة $(1,6)$

$$6 = 1 + c_1 + c_2$$

$$5 = c_1 + c_2 \;\ldots\ldots\ldots \; ①$$

نعوض النقطة $(-1,6) \Leftarrow$

$$6 = -1 - c_1 + c_2$$

$$7 = -c_1 + c_2 \;\ldots\ldots\ldots \; ②$$

$$5 = c_1 + c_2 \;\ldots\ldots\ldots \; ①$$

بالجمع

$$12 = 2c_2 \Rightarrow c_2 = 6$$

وبالتعويض في $① \Rightarrow c_1 = -1$

$\therefore$ معادلة المنحني هي :

$$y = x^3 - x + 6$$

مثال 7

اذا كان ميل منحني عند (x,y) هو $ax - 3x^2$ وكان المستقيم $9x - y - 4 = 0$ مماساً عند $(1,5)$. جد معادلته .



$$y' = ax - 3x^2$$

من المستقيم $9x - y - 4 = 0 \Leftarrow$

$$\text{slope} = \frac{-9}{-1} = 9 \quad \text{الميل}$$

$$\therefore 9 = a(1) - 3(1)^2 \Rightarrow a = 12$$

$$\therefore y' = 12x - 3x^2 \Rightarrow y = \int (12x - 3x^2)\,dx$$

مجموعة منحنيات $y = 6x^2 - x^3 + c$

نعوض النقطة $(1 , 5)$ $\Leftarrow$ $5 = 6 - 1 + c$

$\therefore\ c = 0$

$\therefore$ معادلة المنحني $\therefore\ y = 6x^2 - x^3$

مثال 8

جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة هو $(ax^2 - 6x - 9)$ وللمنحني نقطة انقلاب $(1,-6)$



$y' = ax^2 - 6x - 9 \Rightarrow y'' = 2ax - 6$

بما ان النقطة $(1 ، -6)$ نقطة انقلاب

$\therefore\ y'' = 0 \Rightarrow 0 = 2a(1) - 6 \Rightarrow a = 3$

$\therefore\ y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y = \int (3x^2 - 6x - 9)\, dx$

مجموعة منحنيات $y = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

نعوض النقطة $(1 ، -6)$ $-6 = 1 - 3 - 9 + c \Rightarrow c = 5$

$\therefore$ معادلة المنحني $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

[4-3-2] التطبيق الاقتصادي للتكامل

عملية التكامل غير المحدد هي عكس عملية المشتقة ، وحيث ان المشتقة الاولى لاية دالة اقتصادية بالنسبة لأي متغير ، تعطينا التغير الحدي (The Marginal Change) لذا فإنه باجراء العملية العكسية لدالة التغير الحدي ينتج لدينا الدالة الاصلية . فمثلا ، تكامل التكلفة الحدية يعطينا التكلفة الكلية وتكامل الانتاج الحدي يعطينا الانتاج الكلي ، وهكذا .... وفيما يلي بعض الامثلة التي توضح ذلك :

مثال 1 اذا كانت دالة الايراد الحدي هـــــي $\acute{M} = 8 - 6v - 2v^2$ حـــيث v حجم الانتاج . جد دالة الايراد الكلي ودالة السعر .



بمـــا ان $\acute{M} = 8 - 6v - 2v^2$ دالة الايراد الحدي فإن دالة الايراد الكلي M هي :

$$M = \int (8 - 6v - 2v^2)\, dv$$

$$M = 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3 + c$$

وعندما يكون حجم الانتاج $v = 0$ ، $M = 0$ فإن $c = 0$ لذا فإن (اي ماينتج يباع)

$$M = 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3$$ دالة الايراد الكلي

وحيث ان الايراد M = الكمية المباعة × السعر للوحدة

∴ فان دالة السعر = $\dfrac{M}{\text{الكمية المباعة}}$

$$= \frac{8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3}{v}$$

$= 8 - 3v - \frac{2}{3}v^2$ وذلك بفرض ان ما ينتج يباع

مثال 2 اذا كانت دالة التكلفة الحدية $\acute{T}$ هي : $\acute{T} = 2 + 60v - 5v^2$ حيث v حجم الانتاج

جد دالة التكلفة الكلية . علماً ان $T = 65$.

الحل بما ان دالة التكلفة الحدية $\acute{T} = 2 + 60v - 5v^2$ فإن دالة التكلفة الكلية T هي :

$$T = \int (2 + 60v - 5v^2)\, dv$$

$$T = 2v + 30v^2 - \frac{5}{3} v^3 + c$$

فاذا كانت التكلفة الكلية = 65 عندما حجم الانتاج $V = 0$

فان $C = 65$

∴ دالة التكلفة الكلية هي :

$$T = 2v + 30v^2 - \frac{5}{3} v^3 + 65$$

تمارين (2-4)

1- جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x , y) يساوي $\frac{-2}{x^3}$ وكان المنحني يمر بالنقطة $(1 , 3)$.

2- جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x , y) من نقاطه هي $3x^2 - 6x - 9$ وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها (10) .

3- جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية $= 6x - 2$ وكان ميله عند النقطة $(2 , 5)$ يساوي (-1) .

4- منحني يمر بالنقطتين $(2 , -3)$ ، $(-1 , 9)$ وميله عند (x , y) يساوي $ax - 5$ جد معادلته

5- اذا كانت دالة الايراد الحدي هي :

$$M' = 12 - 8v + v^2$$

فأوجد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب (السعر) بفرض ان ما ينتج يباع.

6- اذا كانت دالة التكلفة الحدية هي :

$$T' = 1000 - 5v$$

حيث v حجم الانتاج، فاوجد دالة التكلفة الكلية مع العلم ان التكلفة الثابتة $= 150$.

[4-4] التكامل المحدد The Definite Integral

يعتبر التكامل المحدد من اهم مواضيع الرياضيات التطبيقية لما له من تطبيقات كثيرة في مختلفة العلوم. في هذا البند سنعطي النظرية الاساسية للتكامل وبعض تطبيقات المساحات والحجوم.

النظرية الاساسية للتكامل
The Fundamental Theorem of Calculus

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$ وكانت $F(x)$ عكس مشتقة $f(x)$ اي ان $F'(x) = f(x)$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

يطلق على a الحد الاسفل للتكامل وعلى b الحد الاعلى للتكامل.

ملاحظة : قواعد التكامل المحدد هي نفس قواعد التكامل غير المحدد .

امثلة جد قيمة التكاملات الآتية:

1) $$\int_1^2 (3x^2 + 2x - 2)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 2x\right]_1^2$$

$$= [x^3 + x^2 - 2x]_1^2$$

$$= [8 + 4 - 4] - [1 + 1 - 2] = 8$$

2) $$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}}\,dx = \int_0^3 (x^2 + 16)^{\frac{-1}{2}} (2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{(x^2 + 16)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2\sqrt{x^2 + 16}\right]_0^3$$

$$= [2\sqrt{9 + 16}] - [2\sqrt{0 + 16}] = 2$$

3) $\int_4^0 x(x-1)(x-2)\,dx = -\int_0^4 (x^3-3x^2+2x)\,dx$

$= -\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^4$

$= -[\,64 - 64 + 16\,] + [\,0\,] = -16$

$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$: لاحظ

4) $\int_1^{125} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int_1^{125} (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

$= 3\int_1^{125} (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\, \frac{1}{3}\, x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

$= \left[3 \cdot \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{125}$

$= \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}\right]_1^{125}$

$= [\,2\sqrt{(\sqrt[3]{125}-1)^3}\,] - 2\sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}\ ]$

$= 16 - 0 = 16$

5) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx = \int_1^4 (x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$= \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4$

$= [\,2\sqrt{4} + \frac{2}{3}\sqrt{(4)^3}\,] - [\,2 + \frac{2}{3}\,] = \frac{20}{3}$

6) جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_0^a (2x-1)\,dx = 42$

$$\int_0^a (2x-1)\,dx = 42$$

$$[x^2 - x]_0^a = 42 \Rightarrow [a^2 - a] - [0] = 42$$

$$a^2 - a - 42 = 0 \Rightarrow (a-7)(a+6) = 0$$

$$a = 7 \quad \text{or} \quad a = -6$$

7) $\int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{x^2 + 12x + 36}\,dx$

$$\int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{(x+6)^2}\,dx \Rightarrow \int_{-6}^{-5} (x+6)^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= \left[\frac{(x+6)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_{-6}^{-5} = \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+6)^5}\right]_{-6}^{-5}$$

$$= \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-5+6)^5}\right] - \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-6+6)^5}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{5}\right] - [0]$$

$$= \frac{3}{5}$$

8) جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_a^2 (3+2x)\,dx = 6$

$$[3x - x^2]_a^2 = 6 \Rightarrow [(6+4) - (3a - a^3)] = 6$$

$$10 - 3a - a^2 - 6 = 0 \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$(a+4)(a-1) = 0$$

$$a = -4 \quad \text{or} \quad a = 1$$

تمارين (4-3)

جد تكاملات كلا مما يأتي:

1) $\int (2x+5)(x+1)\, dx$

2) $\int_{-1}^{1} (x^2+3)(x-2)\, dx$

3) $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+5)\, dx$

4) $\int_{0}^{4} \sqrt{x}\,(x+1)^2\, dx$

5) $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\, dx$

6) $\int_{-1}^{0} \frac{x^3-27}{x-3}\, dx$

7) $\int \frac{x^4-1}{x-1}\, dx$

8) $\int_{0}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$

9) $\int \frac{x^2+1\, dx}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$

10) $\int_{0}^{3} \sqrt[3]{(3x-1)^2}\, dx$

11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

12) $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\, dx$

13) $\int \frac{x^4}{\sqrt[5]{a^2x^5+b^2}}\, dx$

14) $\int_{0}^{8} \sqrt{x^2-14x+49}\, dx$

ملاحظة : $\sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$

15) $\int \frac{dx}{4x^2-12x+9}$

16) $\int_{-1}^{1} \sqrt[5]{3x^5-2x^7}\, dx$

17) $\int \sqrt[3]{2x^5-7x^3}\, dx$

18) $\int_{1}^{b} (13-4x)\, dx = 9$

جد قيمة $b \in R$ اذا علمت ان

[4-5] المساحة تحت المنحني

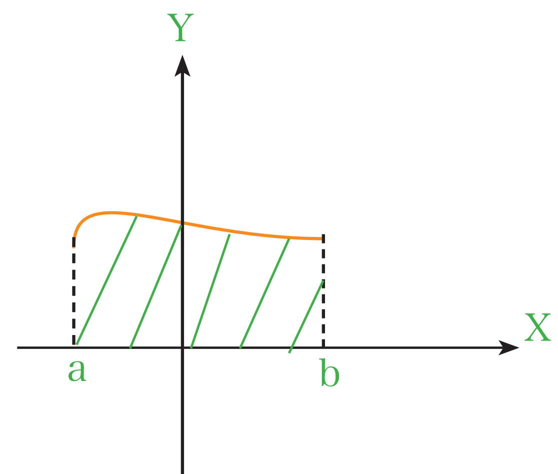
من التطبيقات المهمة للتكامل المحدد هو ايجاد المساحة تحت منحني الـــدالة $y = f(x)$ حــيث $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$.

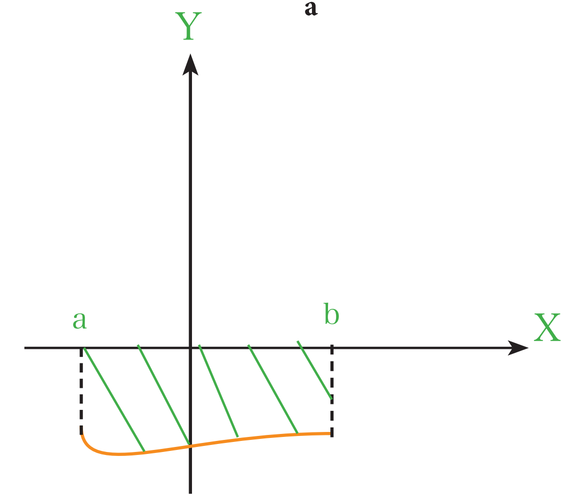
[4-5-1] المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)$ ومحورالسينات x-axis والمستقيمين $x = b$ ، $x = a$

* عندما $f(x) > 0$ (اي المنحني فوق محور السينات) فإن المساحة المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين والتي يرمز لها بالرمز **A**

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

* عندما $f(x) < 0$ (اي المنحني تحت محور السينات) فإن : $A = -\int_a^b f(x)\, dx$





والامثلة الآتية توضح ذلك :

مثال 1

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,3]$.



تقاطع المنحني مع محورالسينات اي نجعل $y = 0$ لمعرفة $f(x) > 0$ أو $f(x) < 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \ , \ x = -1$$

الموقع	اشارة $f(x)$	للفترة $x \in$	الفترة
تحت	$(0)^2 - 2(0) - 3 = -3 < 0$	$x = 0$	$[-1,3]$

$$A = -\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3) \ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3}$$

$$= [-9 + 9 + 9] - [\frac{1}{3} + 1 - 3]$$

$$= [9] - [\frac{-5}{3}] = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} unit^2$$

مثال 2

جد المساحة المحددة بالدالة $y = f(x) = x^3 - x$ ومحور السينات .



التقاطع مع محورالسينات $\Leftarrow y = 0$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = -1 \ , \ x = 1$$

الموقع	اشارة $f(x)$	للفترة $x \in$	الفترة
فوق	$\frac{-1}{8} + \frac{1}{2} > 0$	$x = \frac{-1}{2}$	$[-1,0]$
تحت	$\frac{1}{8} - \frac{1}{2} < 0$	$x = \frac{1}{2}$	$[0,1]$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\ dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x)\ dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{1}$$

$$= [\ 0\ ] - [\frac{1}{4} - \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}] - [\ 0\ ] = \frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

مثال 3

جد المساحة المحددة بالدالة $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 0\ , x = 3$

الحل

التقاطع : وان $y = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow -1 \notin [0,3]$

الفترة	$x \in$ للفترة	اشارة $f(x)$	الموقع
$[0,3]$	$x = 1$	$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 0$	فوق

$$A = \int_{0}^{3} (x+1)^{\frac{1}{2}}\ dx \Rightarrow A = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right]_{0}^{3}$$

$$= [\frac{2}{3} \sqrt{(4)^3}] - [\frac{2}{3} \sqrt{(1)^3}]$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}\ \text{unit}^2$$

[4-5-2] المساحة بين منحني دالتين

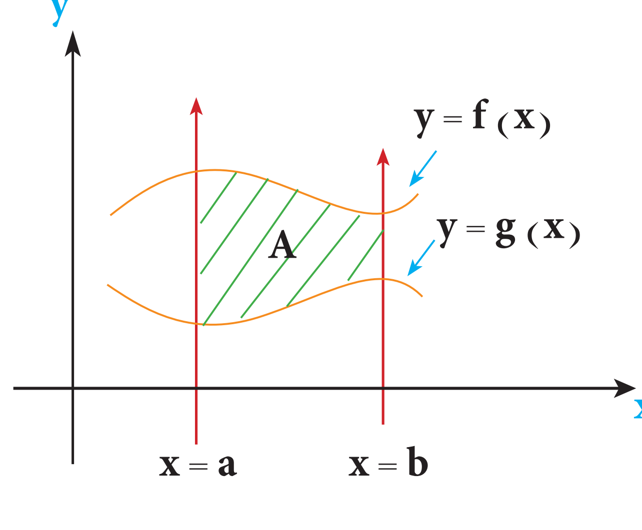
لتكن كل من $f(x)$ ، $g(x)$ دالة معرفة على الفترة $[a,b]$

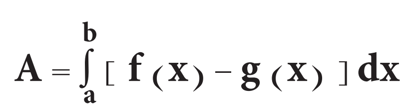
فالمساحة المحددة بين الدالتين والمستقيمين $x=a$, $x=b$ والتي هي يرمز لها بالرمز A :

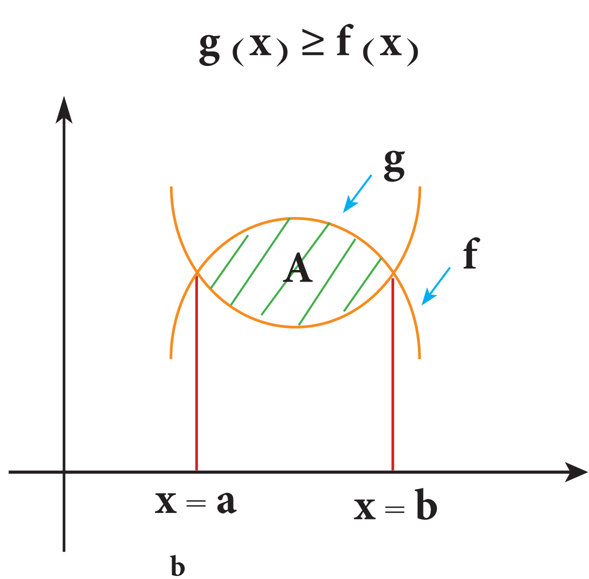
* عندما $f(x) > g(x)$ فإن: $\quad A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

* عندما $f(x) < g(x)$ فإن: $\quad A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$

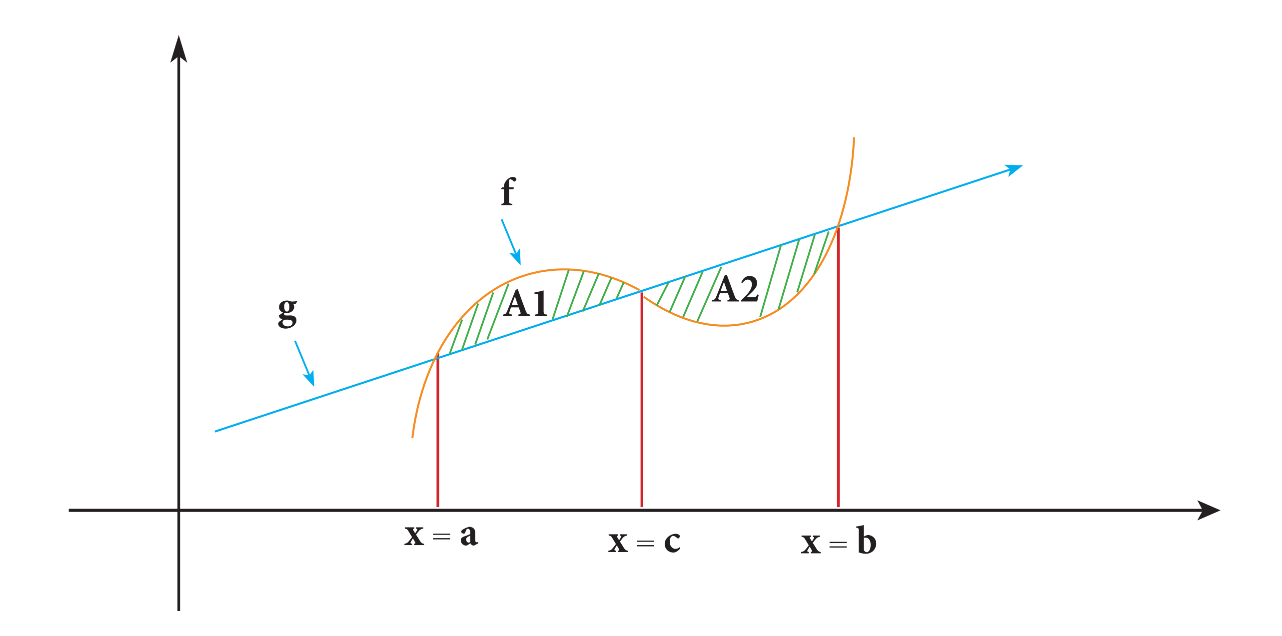
$f(x) > g(x)$ on $[a,b]$







$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$$



$$A = A1 + A2$$

$$= \int_{a}^{c} [\, f(x) - g(x)\,]\, dx + \int_{c}^{b} [\, g(x) - f(x)\,]\, dx$$

مثال 4

جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين $y = f(x) = x$ ، $y = g(x) = x^3$.

الحل

نولد الدالة الجديدة ولتكن :

$$R(x) = f(x) - g(x)$$

$$R(x) = x - x^3$$

نقاطع الدالة $R(x)$ مع محور السينات $\Leftarrow$ $y = 0$

$$x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; x = \mp 1$$

$$[-1,0] \;,\; [0,1]$$

اكمل الحل كما جاء في مثال (2)

مثال 5

لتكن $y = f(x) = x$ وعلى الفترة $[-1,1]$ ، $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$ وعلى الفترة $[-1,1]$ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين .

الحل

نولد الدالة $R(x)$ حيث :

$$R(x) = f(x) - g(x)$$

$$R(x) = x - \sqrt[3]{x}$$

التقاطع : $y = 0 \Rightarrow x \; \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; x = \mp 1$$

$$[-1,0] \;,\; [0,1]$$

الموقع	اشارة $f(x)$	للفترة $x \in$	الفترة
فوق	$\frac{-1}{8} - \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} > 0$	$x = \frac{-1}{8}$	$[-1,0]$
تحت	$\frac{1}{8} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}} < 0$	$x = \frac{1}{8}$	$[0,1]$

$$A = \int_{-1}^{0} [x - x^{\frac{1}{3}}]\, dx + \int_{0}^{1} [x^{\frac{1}{3}} - x]\, dx$$

$$= [\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}]_{-1}^{0} + [\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{2} x^2]_{0}^{1}$$

$$= [0] - [\frac{1}{2} - \frac{3}{4}] + [\frac{3}{4} - \frac{1}{2}] - [0]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

تمارين (4-4)

1- جد المساحة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x=-2 , x=2$ حيث

$y = f(x) = x^3 - 4x$

2- جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,1]$

3- جد المساحة المحددة بالدالة $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.

4- جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{2}x$ والمستقيمين

$x = 2 \quad , \quad x = 5$

5- جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^4 - 12 \quad , \quad y = x^2$

المحتـــــويات

جدول المصطلحات

عربي	انكليزي
1ـ التكامل	Integration
2ـ التغير الحدي	Margina Integral
3ـ التكامل المحدد	Defenite Integral
4ـ النظرية الأساسية للتكامل	Fundamental theorem of Calculus
5ـ الإشتقاق	Differentiation
6ـ دالة الكلفة الكلية	Total cost function
7ـ تزايد	Increasing
8ـ تناقص	Decreasing
9ـ الغاية	Limit
10ـ الإستمرارية	Continuity
11ـ إستمرارية الدالة	Continuity of function
12ـ الجوار	Neighbourhood
13ـ مبرهنة ذات الحدين	Bionnomial Theorem
14ـ طرائق العد	Counting methods
15ـ مبدأ العد الأساسي	Fundamental Counting Principle
16ـ تباديل	Permutations
17ـ توافيق	Combinations
18ـ مخطط الشجرة	Tree Diagram
19ـ مضروب العدد	Factorial